Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.947.5.37 *МАТЕМАТИКА*

М. Л. ГОРБАЧУК, А. Н. КОЧУБЕЙ

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 V 1971)

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $L_2(H, (a, b))$, $-\infty < a < b < \infty$, гильбертово пространство вектор-функций $y(t)$, $t \in [a, b]$, со значениями в H таких, что $\int\limits_a^b \|y(t)\|^2 dt < \infty$, скалярное произведение в котором определяется как

$$\langle y, z\rangle = \int\limits_a^b (y(t), z(t))\,dt \qquad (y(t), z(t) \in L_2(H, (a, b))).$$

Рассмотрим в $L_2(H, (a, b))$ дифференциальное выражение

$$l[y] = (-1)^n y^{(2n)} + Ay + q(t)y, \tag{1}$$

где A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H (можно считать $A \geqslant E$, E — тождественный оператор в H), а $q(t)$ при каждом фиксированном $t \in [a, b]$ — ограниченный самосопряженный оператор в H и такой, что $\|q(t)\|$ ограничена на $[a, b]$. Кроме того, предполагается, что оператор-функция $q(t)$ слабо измерима.

На множестве D_0' элементов вида $y(t) = \sum\limits_{k=1}^m \varphi_k(t) f_k$, где f_k принадлежит области определения $D(A)$ оператора A, $\varphi_k(t)$ — финитная на $[a, b]$ $2n$ раз непрерывно дифференцируемая функция, определим симметрический оператор L_0': $L_0'y = l[y]$, $y \in D_0'$.

Замыкание L_0 оператора L_0' в $L_2(H, (a, b))$ называется минимальным оператором, порожденным выражением (1). Сопряженный к L_0 оператор L_0^* называется максимальным.

В данной работе исследуются области определения минимального и максимального операторов, порожденных выражением (1), и описываются с помощью граничных условий все самосопряженные расширения в $L_2(H, (a, b))$ оператора L_0. В предположении дискретности спектра оператора A дается описание тех граничных задач, для которых соответствующие самосопряженные расширения имеют дискретный спектр. В случае, когда в выражении (1) $n = 1$, аналогичные вопросы изучались в ([1], [2]). Если в (1) отсутствует неограниченный оператор A, описание с помощью граничных условий получено в ([3], [4]).

2. Обозначим через H_τ $(-1 \leqslant \tau \leqslant 1)$ гильбертову шкалу пространств ([5]), порожденную оператором A. Будем писать H_+ и H_- вместо H_1 и H_{-1} соответственно. Оператор A изометрически действует из H_+ в $H_0 = H$. Тогда сопряженный к нему оператор $\tilde{A}$, действующий из H в H_-, является расширением оператора A. Обозначим

$$\tilde{l}[y] = (-1)^n y^{(2n)} + \tilde{A}y + q(t)y.$$

Лемма 1. *$D(L_0^*)$ состоит из тех и только тех вектор-функций $y(t)$, которые представляются в виде*

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha_k \sqrt[2n]{\tilde{A}}\,(t-a)} f_k+\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha_k \sqrt[2n]{\tilde{A}}\,(t-b)} g_k+ \tag{2}$$
$$+\frac{(-1)^n}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k^{2n-1}}\int_a^b e^{\alpha_k \sqrt[2n]{A}\,|t-s|} A^{-(2n-1)/(2n)} h(s)\,ds,$$

где $f_k, g_k \in H_{-1/(4n)}$ $(k=1, 2,\ldots, n)$, $h(s)\in L_2(H, (a, b))$, α_k $(k=1, 2,\ldots$ $\ldots, n)$ — корни уравнения $\alpha^{2n}=(-1)^{n+1}$, имеющие отрицательные вещественные части.

Из представления (2) следует, что вектор-функция $y(t)\in D(L_0^*)$ непрерывна в $H_{-1/(4n)}$ на $[a, b]$ и при каждом $j=1, 2,\ldots, 2n-1$ имеет непрерывную на $[a, b]$ j-ю производную в $H_{-(2j+1)/(4n)}$. Кроме того, при $t\in$ $\in (a, b)$ $\quad y^{(j)}(t)\in H_{(4n-2j-1)/(4n)}$ $(j=0, 1,\ldots, 2n-1)$.

Опишем некоторые свойства граничных значений функций из $D(L_0^*)$. Пусть p_j, $q_j\in H_{-(2j+1)/(4n)}$ $(j=0, 1,\ldots, 2n-1)$. Определим векторы $u_k(p_0,\ldots, p_{2n-1})$ и $v_k(q_0,\ldots, q_{2n-1})$ равенствами

$$u_k=\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & \tilde{A}^{2n-1/2n}p_0 & 1 & \ldots & 1\\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & (-\alpha_1) & \ldots & (-\alpha_{k-1}) & \tilde{A}^{2n-2/2n}p_1 & (-\alpha_{k+1}) & \ldots & (-\alpha_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_1^{2n-1} & \ldots & \alpha_n^{2n-1} & (-\alpha_1)^{2n-1} & \ldots & (-\alpha_{k-1})^{2n-1} & p_{2n-1} & (-\alpha_{k+1})^{2n-1} & \ldots & (-\alpha_n)^{2n-1}\end{vmatrix},$$

$$v_k=\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \tilde{A}^{(2n-1)/(2n)}q_0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1\\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-1} & \tilde{A}^{(2n-2)/(2n)}q_1 & \alpha_{k+1} & \ldots & \alpha_n & (-\alpha_1) & \ldots & (-\alpha_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_1^{2n-1} & \ldots & \alpha_{k-1}^{2n-1} & q_{2n-1} & \alpha_{k+1}^{2n-1} & \ldots & \alpha_n^{2n-1} & (-\alpha_1)^{2n-1} & \ldots & (-\alpha_n)^{2n-1}\end{vmatrix},$$

$$k=1, 2, \ldots, n.$$

Лемма 2. *Для того чтобы существовали $y(t)$, $z(t)\in D(L_0^*)$ такие, что $y^{(j)}(a)=p_j$, $z^{(j)}(b)=q_j$ $(j=0, 1,\ldots, 2n-1)$, необходимо и достаточно, чтобы u_k, $v_k\in H_{1/(4n)}$ $(k=1, 2,\ldots, n)$.*

Пусть Δ — определитель Вандермонда, построенный по числам $\alpha_1,\ldots$ $\ldots, \alpha_n, -\alpha_1,\ldots, -\alpha_n$, и пусть c_{jk} и d_{jk} — алгебраические дополнения в Δ элементов $(-\alpha_k)^j$ и α_k^j соответственно. Определим числа γ_{lk}, β_{lk} из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_{lk}c_{jk}=\delta_{j,\,2n-1},\quad j=n, n+1,\ldots, 2n-1;$$
$$\sum_{k=1}^{n}\beta_{lk}d_{jk}=\delta_{j,\,2n-l},\quad j=n, n+1,\ldots, 2n-1$$

$(l=1, 2,\ldots, n;$ δ_{ij} — символ Кронекера).

Обозначим при каждом $l=1, 2,\ldots, n$

$$\begin{aligned} y_a^{(l-1)}&=y^{(l-1)}(a),\quad y_a^{(2n-l)}=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{lk}\tilde{A}^{-(l-1)/(2n)}u_k\left(y(a),\ldots, y^{(2n-1)}(a)\right),\\ y_b^{(l-1)}&=y^{(l-1)}(b),\quad y_b^{(2n-l)}=\sum_{k=1}^{n}\beta_{lk}\tilde{A}^{-(l-1)/(2n)}v_k\left(y(b),\ldots, y^{(2n-1)}(b)\right). \end{aligned}\tag{3}$$

Для любых $y(t),\ z(t)\in D(L_0^*)$ имеет место следующий аналог формулы Грина:

$$\langle L_0^* y, z\rangle - \langle y, L_0^* z\rangle = \sum_{l=1}^{n} [(y_t^{(l-1)}, z_t^{(2n-l)}) - (y_t^{(2n-l)}, z_t^{(l-1)})]_{t=a}^{b}. \qquad (4)$$

Обозначим далее через L' сужение оператора L_0^* на множество D' всех $2n$ раз сильно непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $y(t)$ таких, что при каждом $t\in[a, b]$ $y(t)\in D(A)$, и, кроме того, $l[y]\in L_2(H, (a, b))$.

Теорема 1. *Вектор-функция $y(t)\in D_2(H, (a, b))$ принадлежит $D(L_0^*)$ тогда и только тогда, когда:* а) *$y^{(2n-1)}(t)$ существует в H_- и является абсолютно непрерывной на (a, b);* б) *$\tilde{l}[y]\in L_2(H, (a, b))$. На $D(L_0^*)$ оператор L_0^* действует как $L_0^* y = \tilde{l}[y]$ и совпадает с замыканием в $L_2(H, (a, b))$ оператора L'. $D(L_0)$ состоит из тех и только тех функций из $D(L_0^*)$, для которых $y^{(j)}(a) = y^{(j)}(b) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, 2n-1)$.*

3. Положим $H^{2n} = \underbrace{H\oplus H\oplus\ldots\oplus H}_{n}$. Отнесем каждой вектор-функции $y(t)\in D(L_0^*)$ пару векторов $Y,\ Y'\in H^{2n}$:

$$\begin{aligned}
Y = \{&\tilde{A}^{-1/(4n)} y_a, &&\ldots, &&\tilde{A}^{-(2l-1)/(4n)} y_a^{(l-1)}, &&\ldots, &&\tilde{A}^{-(2n-1)/(4n)} y_a^{(n-1)};\\
&\tilde{A}^{-1/(4n)} y_b, &&\ldots, &&\tilde{A}^{-(2l-1)/(4n)} y_b^{(l-1)}, &&\ldots, &&\tilde{A}^{-(2n-1)/(4n)} y_b^{(n-1)}\},\\
Y' = \{&\tilde{A}^{1/(4n)} y_a^{(2n-1)}, &&\ldots, &&\tilde{A}^{(2l-1)/(4n)} y_a^{(2n-l)}, &&\ldots, &&\tilde{A}^{(2n-1)/(4n)} y_a^{(n)};\\
-&\tilde{A}^{1/(4n)} y_b^{(2n-1)}, &&\ldots, -&&\tilde{A}^{(2l-1)/(4n)} y_b^{(2n-l)}, &&\ldots, -&&\tilde{A}^{(2n-1)/(4n)} y_b^{(n)}\}.
\end{aligned} \qquad (5)$$

Лемма 3. *Для произвольной пары векторов $Y,\ Y'\in H^{2n}$ существует вектор-функция $y(t)\in D(L_0^*)$ такая, что Y и Y' имеют вид (5).*

Исходя из леммы 3 и формулы (4) и пользуясь представлением бинарного отношения из ([4]), нетрудно получить следующую теорему.

Теорема 2. *Всякое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ минимального оператора L_0 порождается операцией $\tilde{l}[y]$ и краевыми условиями любого из видов*

$$\cos CY' - \sin CY = 0; \qquad (6)$$

$$(U - E)Y' - i(U + E)Y = 0, \qquad (7)$$

где C и U — самосопряженный и соответственно унитарный операторы в H^{2n}, а Y и Y' определяются по $y(t)\in D(L_0^*)$ с помощью формул (5).

Обратно, любым из краевых условий (6), (7) определяется некоторое самосопряженное расширение $\tilde{L}_C$ оператора L_0 в $L_2(H, (a, b))$.

Предположим теперь, что спектр оператора A дискретный, т. е. состоит из собственных значений конечной кратности с единственной точкой сгущения $+\infty$.

Теорема 3. *Для любого замкнутого множества F действительной оси существует самосопряженное расширение $\tilde{L}$ минимального оператора L_0 в $L_2(H, (a, b))$, спектр которого содержит множество F.*

Так как многие задачи математической физики могут быть записаны с помощью выражения (1), в котором оператор A имеет дискретный спектр, и граничных условий типа (6) и спектр хорошо известных задач (например, задачи Дирихле) дискретный, то представляет интерес в общем случае выделить те граничные условия (6), которые соответствуют расширениям $\tilde{L}_C$ с дискретным спектром. Следующая теорема дает описание таких условий.

Теорема 4. *Пусть оператор A имеет дискретный спектр. Для того чтобы самосопряженное расширение $\tilde{L}_C$ имело дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы $\cos C$ был вполне непрерывным оператором в H^{2n}.*

Обозначим σ_p $(p \geqslant 1)$ идеалы Неймана — Шэттена (см. [6]). Имеет место

Теорема 5. *Пусть* $A^{-(2np-1)/(2np)} \in \sigma_p$ *в* H. *Для того чтобы* $R_\lambda(\tilde{L}_C) \in \sigma_p$ *в* $L_2(H, (a, b))$ *при* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\cos C \in \sigma_p$ *в* H^{2n}.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
9 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Л. Горбачук, Функц. анализ и его приложения, 5, в. 1 (1971). [2] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, Укр. матем. журн., 23, № 6 (1971). [3] М. Г. Крейн, *Матем. сборн.*, 21, № 1 (1947). [4] *Ф. С. Рофе-Бекетов, ДАН*, 184, № 5 (1969). [5] *Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Киев, 1965. [6] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965.