Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

Ю. А. ДУБИНСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ОБЩЕГО ВИДА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 21 V 1971)

В работе изучаются дифференциально-операторные (д.о.) уравнения произвольного порядка

$$P(d/dt)\,u(t) \equiv \sum_{j=0}^{s} A_j u^{(j)}(t) = h(t), \quad s \geqslant 1, \tag{1}$$

где $A_0, \ldots, A_{s-1}$, $A_s = Id$ — замкнутые линейные операторы в банаховом пространстве X; $u(t): I \to X$ $(I \subset \mathbf{R}^1)$, $u^{(j)} \equiv d^j u / dt^j$.

Выделяются следующие классы д.о. уравнений: параболический, обратно параболический, гиперболический, квазиэллиптический и квазигиперболический. Для введенных классов уравнений исследуются краевые задачи.

I. Необходимые пространства. $H(q, s, P)(X) = \{u(t): I \to D(P) \equiv \bigcap D(A_j) \,|\, \|u\|^q_{q,s,P} \equiv \langle \|u(t)\|^q_X + \sum \|A_j u^{(j)}(t)\|^q_X \rangle_I < \infty$, где $\langle \cdot \rangle_I$ означает интеграл по $I \subset \mathbf{R}^1$; $q \geqslant 1\}$. Далее, $H(q, s, P; \gamma)(X) = \{u(t) \,|\, u(t) \exp(-\gamma t) \in H(q, s, P)(X), \gamma \in \mathbf{R}^1\}$,

$$H(q, k, Id; \gamma)(X) = \left\{u(t) \,\middle|\, \sum_{j=0}^{k} \langle (u \exp(-\gamma t))^{(j)} \rangle_I < \infty \right\}.$$

II. Д.о. уравнения на всей оси. Периодические решения.

Определение 1. Оператор $P(d/dt)$ называется γ-регулярным, если: а) спектр $\sigma(P)$ * пучка $P(z)$ лежит вне прямой $\operatorname{Re} z = \gamma$; б) существует банахово пространство $Y \subset X$, что отображение $P^{-1}(z): Y \to D(P)$ $(\forall z \;\; \operatorname{Re} z = \gamma)$ аналитически мономорфно, причем $\|A_j P^{-1}(z)\|_{Y \to X} \leqslant C(1 + |z|)^{k-j}$, где $j = 0, \ldots, s$, $C = C(\gamma) > 0$ — постоянная, $k \geqslant 0$ — целое число.

Теорема 1. *Пусть оператор $P(d/dt)$ γ-регулярен, $I = \mathbf{R}^1$, Y, X — гильбертовы пространства.*

Тогда для любой функции $h(t) \in H(2, k, Id; \gamma)(Y)$ уравнение (1) *имеет решение $u(t) \in H(2, s, P; \gamma)$ (X), определяемое формулой*

$$u(t) = \exp(\gamma t) \langle P^{-1}(\gamma + i\lambda) [dE_\lambda (h \exp(-\gamma t))] \rangle_{\mathbf{R}^1}, \tag{2}$$

где E_λ — спектральная функция оператора $-i\,d/dt$ в $L_2(\mathbf{R}^1, X)$.

Аналогичные утверждения справедливы для случая $I \equiv S^1$ (S^1 — единичная окружность), если $\sigma(P) \cap \{z \,|\, z = im,\; m = 0, \pm 1, \ldots\} = \phi$. Если же оператор $P(d/dt)$ γ-регулярен, то корректной является, очевидно, задача о нахождении решений вида $u(t) = v(t) \exp(-\gamma t)$, где $v(t)$ — периодическая функция.

III. Д.о. уравнения на полуоси.

А. Задача Коши для параболических уравнений.

Определение 2. Оператор $P(d/dt)$ называется параболическим, если: а) $\sigma(P) \subset \{z \,|\, \operatorname{Re} z \leqslant \gamma_0\}$, γ_0 — некоторое число; б) существует

* Здесь и ниже речь идет только о точечном спектре рассматриваемых операторов.

банахово пространство $Y \subset X$, что отображение $P^{-1}(z)\colon Y \to D(P)$ аналитически мономорфно; причем, если $\operatorname{Re} z \geqslant a > \gamma_0$, то

$$\|A_j P^{-1}(z)\|_{Y\to X} \leqslant C(a)(1+|z|)^{k-j}, \tag{3}$$

$C(a) > 0$, $k \geqslant 0$ — целое число, $j = 0, \ldots, s$.

Теорема 2. *Пусть оператор* $P(d/dt)$ *параболичен,* $\gamma > \gamma_0$, $h(t) \in H(q, k+1, Id; \gamma)(Y)$.

Тогда задача Коши

$$P(d/dt)u(t) = h(t), \quad u(0) = 0, \ldots, u^{(s-1)}(0) = 0, \tag{4}$$

имеет решение $u(t) \in H(q, s, P; \gamma)(X)$, *определяемое формулой*

$$u(t) = -(2\pi i)^{-1}\langle z^{-k}\exp(zt) * P^{-1}(z)h^{(k)}(t)\rangle_{\operatorname{Re} z = a}, \tag{5}$$

где $a \in (\gamma_0, \gamma)$ *—любое число,* $*$ *— свертка по* t *в смысле операционного исчисления* *.

Б. Задача без начальных условий для обратно параболических уравнений.

Определение 3. Оператор $P(d/dt)$ называется обратно параболическим, если оператор $P(-d/dt)$ является параболическим.

Теорема 3. *Пусть* $P(d/dt)$ *— обратно параболический оператор,* $\gamma < -\gamma_0$, $h(t) \in H(q, k+1, Id; \gamma)(Y)$.

Тогда уравнение (1) *имеет решение* $u(t) \in H(q, s, P; \gamma)(X)$, *определяемое формулой* (5), *где* $*$ *означает свертку от* $+\infty$ *до* t; $a \in (\gamma_0, -\gamma)$.

В. Задача Коши и задача без начальных условий для гиперболических уравнений.

Определение 4. Оператор $P(d/dt)$ называется гиперболическим, если он одновременно параболичен и обратно параболичен. Это значит, что существуют числа $\gamma_0 \leqslant \gamma_1$, что $\sigma(P) \subset \{z \mid \gamma_0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \gamma_1\}$. Кроме того, при $\operatorname{Re} z \leqslant a < \gamma_0$, $\operatorname{Re} z \geqslant b > \gamma_1$ имеют место неравенства (3). (Можно считать, что $\gamma_1 \geqslant 0$, $\gamma_0 \geqslant -\gamma_1$.)

Теорема 4. *Для гиперболического уравнения имеют место утверждения теорем* 2, 3.

Г. Краевые задачи для квазиэллиптических уравнений.

Определение 5. Оператор $P(d/dt)$ называется квазиэллиптическим, если спектр $\sigma(P)$ расположен вне некоторой одной (открытой или замкнутой) полосы $\gamma_0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \gamma_1$, причем, если $\gamma_0 \leqslant a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b \leqslant \gamma_1$, то

$$\|A_j P^{-1}(z)\|_{Y\to X} \leqslant C(a, b)(1+|z|)^{k-j}, \quad j = 0, \ldots, s. \tag{6}$$

1. Рассматривается задача

$$P(d/dt)\,u \equiv \sum_{j=0}^{s} A_j u^{(2j)}(t) = h(t), \quad t > 0, \tag{7}$$

$$u^{(2j)}(0) = 0, \quad j = 0, \ldots, s-1. \tag{8}$$

Допустим, что оператор $P(d/dt)$ квазиэллиптичен, причем Y, X — гильбертовы пространства. Обозначим через E_λ спектральную функцию оператора $B = (d/dt + \gamma)^2$ как оператора в $L_2(\mathbf{R}_+^1, X)$ с областью определения $D(B) = \{u(t) \mid u(t) \in H^2(\mathbf{R}_+^1, X),\ u(0) = 0\}$.

Теорема 5. *Пусть* $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$, $h(t) \in H(2, k, Id; \gamma)(Y)$.

Тогда решение задачи (7) (8) *определяется формулой*

$$u(t) = \exp(\gamma t)\langle P^{-1}(\gamma + i\lambda)\,[dE_\lambda(h\exp(-\gamma t))]\rangle_{R_+^1}.$$

---

* Без ограничения общности можно считать, что $\gamma_0 \geqslant 0$; в противном случае надо сделать сдвиг $z \to z - \gamma_0$.

2. Пусть A: $D(A) \to X(\overline{D(A)} = X)$ — замкнутый оператор, удовлетворяющий условиям:

а) $\sigma(A) \subset S = \{z | 0 \leqslant |\arg z| \leqslant \pi/2 - \theta\}$, $\theta > 0$ — некоторое число, $0 \in \sigma(A)$;

б) для любого луча $\arg z = \alpha$, $\pi/2 - \theta < |\alpha| < \pi/2$, имеет место оценка $\|(A - z)^{-1}\|_{X \to X} \leqslant C(1 + |z|)^{-1}$, $C = C(\alpha) > 0$.

На полуоси $\mathbf{R}_+^1$ рассматривается уравнение

$$P\left(A, \frac{d}{dt}\right) u \equiv \sum_{j=0}^{s} a_j A^{s-j} u^{(j)}(t) = h(t), \quad a_j \in \mathbf{C}^1, \tag{9}$$

где $P(A, d/dt)$ таков, что для любых $\lambda \in S \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbf{R}^1$

$$P(\lambda, i\tau) \equiv \sum_{j=0}^{s} a_j \lambda^{s-j} (i\tau)^j \neq 0.$$

Обозначения. Пусть $\mu_1(\lambda), \ldots, \mu_{m_-}(\lambda)$ — корни полинома $P(\lambda, z)$ такие, что $\operatorname{Re} \mu_j(\lambda) < 0$, $j = 1, \ldots, m_-$. Положим $\mu_* = \max \operatorname{Re} \mu_j(\lambda)$, $j = 1, \ldots, m_-$; $\mu^* = \min \operatorname{Re} \mu_j(\lambda)$, $j = m_- + 1, \ldots, s$; $\lambda \in \sigma(A)$.

Теорема 6. *Пусть* $\gamma \in (\mu_*, \mu^*)$, $Ah(t) \in H(q, 0, Id; \gamma)(X)$.

Тогда уравнение (9) *имеет единственное решение* $u \in H(q, s, P; \gamma)(X)$, *удовлетворяющее условиям* $u(0) = 0, \ldots, u^{(m_- - 1)}(0) = 0$. *Это решение представимо в виде*

$$u(t) = (-2\pi i)^{-1} \langle P^{-1}(z)(A - z)^{-1} h(t) \rangle_\Gamma,$$

где $P^{-1}(z)$ *означает оператор, обратный к задаче*

$$P(z, d/dt) u(t) = h(t), \quad u(0) = 0, \ldots, u^{(m_- - 1)}(0) = 0;$$

Γ — *контур, уходящий лучеобразно в бесконечность и охватывающий* $\sigma(A)$.

Д. Краевые задачи для квазигиперболических уравнений.

Определение 6. Оператор $P(d/dt)$ называется квазигиперболическим, если $\sigma(P)$ расположен вне конечного числа (открытых или замкнутых) полос $\gamma_{2j} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \gamma_{2j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, N$ $(N \geqslant 1)$. При этом в каждой из «резольвентных» полос справедливы неравенства (6).

На полуоси $\mathbf{R}_+^1$ рассматривается уравнение (9), где A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X; $\sigma(A) \subset [\lambda_0, \infty)$, $\lambda_0 > 0$.

Допустим, что среди корней полинома (по z) $P(\lambda, z)$ имеется m чисто мнимых корней $(0 \leqslant m \leqslant s)$ и m_- корней $z = \mu_j(\lambda)$ таких, что $\operatorname{Re} \mu_j(\lambda) < 0$.

Теорема 7. *Пусть* $\gamma \in (\mu_*, 0)$, $h(t) \exp(-\gamma t) \in L_2(\mathbf{R}_+^1, X), \ldots$ $\ldots, A^n h(t) \exp(-\gamma t) \in L_2(\mathbf{R}_+^1, X)$, *где* $(n-1)$ — *число, равное максимальной кратности чисто мнимых корней.*

Тогда уравнение (9) *имеет единственное решение* $u(t) \in H(2, s, P; \gamma)(X)$, *удовлетворяющее условиям* $u(0) = 0, \ldots, u^{(m_- - 1)}(0) = 0$. *Это решение представимо в виде*

$$u(t) = \langle P^{-1}(\gamma + i\lambda)[dE_\lambda h(t)] \rangle_{\sigma(A)}, \tag{10}$$

где E_λ — *спектральная функция оператора* A.

Теорема 8. *Пусть* $\gamma \in (0, \mu^*)$, $h(t) \exp(-\gamma t) \in L_2(\mathbf{R}_+^1, X), \ldots$ $\ldots, A^n h(t) \exp(-\gamma t) \in L_2(\mathbf{R}_+^1, X)$.

Тогда уравнение (9) *имеет единственное решение* $u(t) \in H(2, s, P; \gamma)(X)$, *удовлетворяющее условиям* $u(0) = 0, \ldots, u^{(m_- + m - 1)}(0) = 0$. *Оно представимо формулой* (10).

Замечание. Общие краевые задачи для уравнений вида (9) см. в ([1]).

IV. Теорема единственности. *Пусть $\overline{Y} = \{u | u \in D(P), A_j u \in Y\}$ плотно в $D(P)$ в том смысле, что для любого $u \in D(P)$ существует последовательность $u_n \in \overline{Y}$ такая, что $u_n \to u$, $A_j u_n \to A_j u$ в пространстве X. Тогда решения задач, рассмотренных в п.п.* II, III *единственны.*

V. Метод доказательства. Абстрактная теорема.

Доказательства предыдущих результатов основаны на сведении краевых задач для уравнения (1) к операторному уравнению вида

$$P(B)u \equiv \sum_{j=0}^{s} A_j B^j u = h, \quad A_s = Id, \tag{11}$$

где $A_0, \ldots, A_{s-1}$, B — замкнутые операторы в банаховом пространстве E.

Обозначения. Γ — непрерывная спрямляемая кривая в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ такая, что длина вдоль Γ (от какой-либо фиксированной точки) одного порядка, что и $|z|$, $z \in \Gamma$. S_+ — часть плоскости, лежащая справа от Γ, S_- — слева.

Условия. а) $D(A_j B) = D(BA_j)$, $A_j B = BA_j$, $j = 0, \ldots, s$; б) $\sigma(B) \subset S_+$, $\sigma(P) \subset S_-$; в) существуют банаховы пространства $F_1 \subset X$, $F_2 \subset X$ такие, что:

1) для любого $z \in \overline{S_+}$ отображение $(B - z)^{-1}: F_1 \to D(B)$ мономорфно. При этом $(B - z)^{-1}: F \to F_2$ и

$$\|(B - z)^{-1}\|_{F_1 \to E} \leqslant C(1 + |z|)^{-1}, \quad \|(B - z)^{-1}\|_{F \to F_2} \leqslant C(1 + |z|)^{-1},$$

где $F = F_1 \cap F_2$, $C > 0$ — постоянная;

2) для любого $z \in \overline{S_-}$ отображение $P^{-1}(z): F_2 \to D(P)$ есть аналитический мономорфизм. При этом $A_j P^{-1}(z): F \to F_1$, $j = 0, \ldots, s$, и

$$\|A_j P^{-1}(z)\|_{F \to F_1} \leqslant C(1 + |z|)^{k-j}, \quad \|A_j P^{-1}(z)\|_{F_2 \to E} \leqslant C(1 + |z|)^{k-j},$$

где $C > 0$, $k \geqslant 0$ — целое число.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* а) — в); $B^k h \in F$, $B^{k+1} h \in F$. *Тогда решение уравнения* (11) *определяется формулой*

$$u = -(2\pi i)^{-1} \langle z^{-k} P^{-1}(z)(B - z)^{-1} B^k h \rangle_\Gamma.$$

Оно единственно при дополнительном условии плотности типа условия, рассмотренного в IV.

В случае самосопряженного оператора B решение уравнения (11) записывается в виде

$$u = \langle P^{-1}(\lambda)[d(E_\lambda h)] \rangle_{\sigma(B)},$$

где E_λ — спектральное семейство оператора B.

VI. Замыкание. Предыдущие результаты допускают замыкание в нормах пространств, порождаемых дробной степенью позитивного оператора B. В частности, при $F \equiv E$, $k = 0$ получаем изоморфизмы соответствующих пространств.

Замечание. В п.п. V, VI мы развиваем результаты работы ([2]), относящиеся к случаю $s = 1$.

VII. Разнообразные приложения полученных результатов к краевым задачам для дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений очевидны.

Московский энергетический институт

Поступило 20 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Дубинский, ДАН, 196, № 1, 32 (1971). [2] P. Grisvard, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 21, F. III, 307 (1967).