Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 532.593.4 ГИДРОМЕХАНИКА

А. А. ЗАЙЦЕВ

ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПОДВОДНЫМ ИСТОЧНИКОМ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 20 V 1971)

В статье рассматривается установившееся волновое движение на поверхности потока идеальной тяжелой жидкости постоянной глубины H, движущейся со скоростью c в направлении положительной оси абсцисс. Прямоугольная система координат выбрана так, что плоскость XOY совпадает с невозмущенным уровнем жидкости, а ось Oz направлена вертикально вверх. Волны возбуждаются точечным периодически действующим источником, находящимся на глубине $h < H$. Частота колебаний источника $\omega > 0$. Установившийся режим рассматривается как предел неустановившегося при $t \to \infty$.

Волновая картина в случае жидкости бесконечной глубины исследовалась Л. Н. Сретенским [1], Эггерсом [2], Ньюмэном [3], Лайтхиллом [4]. Если принять, что расход источника постоянен по времени, то рассматриваемая задача сведется к задаче о корабельных волнах, возникающих на поверхности потока конечной глубины; решение этой последней задачи было найдено Хавелоком [5], а затем Л. В. Черкесовым [6].

Пусть расход источника q меняется по закону

$$q = H(t)\exp(i\omega t),$$

где $H(t)$ — функция Хэвисайда. Пусть существует потенциал скоростей возмущенного движения $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$. Тогда φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = -H(t)\exp(i\omega t)\,\delta(x, y, z + h), \tag{1}$$

граничным условиям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2c\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = 0 \quad \text{при } z = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H, \tag{3}$$

а также условию

$$\varphi = 0 \quad \text{при } t < 0. \tag{4}$$

Отклонение свободной поверхности $\zeta = \zeta(x, y, t)$ определится по формуле

$$\zeta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\Big|_{z=0}. \tag{5}$$

Решение краевой задачи (1) — (4) может быть найдено с помощью преобразования Фурье по горизонтальным координатам x и y и дальнейшим решением обыкновенных дифференциальных уравнений. Если далее использовать равенство (5), то для возвышения свободной поверхности получится представление

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2, \tag{6}$$

$$\zeta_k = \frac{H(t)}{4\pi^2} \int_0^t \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \rho b}{\operatorname{ch} \rho} \exp(i\widetilde{\Phi}_k)\, d\xi\, d\eta\, d\tau_1, \qquad k = 1, 2, \tag{7}$$

$$\widetilde{\Phi}_k = \omega t + (-1)^k \sqrt{\frac{g}{H}}\, \sigma\tau_1 - \xi x - \eta y + \xi c\tau_1 - \omega\tau_1, \tag{8}$$

$$b = (H - h)\,/\,H, \qquad \rho = H^{-1}\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad \sigma = \sigma(\rho) = \sqrt{\rho \operatorname{th} \rho}. \tag{9}$$

Формула для установившегося движения получится, если в интегральном представлении для ζ_k интегрирование по τ_1 осуществить до бесконечности. Пусть

$$\xi = -\rho H^{-1} \cos\theta, \quad \eta = -\rho H^{-1} \sin\theta, \quad x = rH\cos\gamma, \quad y = rH \sin\gamma,$$

$$\tau = \tau_1 \sqrt{\frac{g}{H}}, \quad \Phi_k = \omega t + (-1)^k \sigma\tau + \rho r \cos(\theta - \gamma) -$$

$$- \frac{\rho c\tau}{\sqrt{gH}} \cos\theta - \frac{\omega \sqrt{H}\tau}{\sqrt{g}}, \quad k = 1, 2. \tag{10}$$

Тогда ζ_k принимает вид

$$\zeta_k = \frac{H^{-3/2} g^{-1/2}}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho \frac{\operatorname{ch} \rho b}{\operatorname{ch} \rho} \exp(i\Phi_k)\, d\rho\, d\theta\, d\tau, \quad k = 1, 2. \tag{11}$$

Для исследования ζ_k будет использован метод стационарной фазы многократных интегралов. Условие стационарности фазы интеграла ζ_k имеет вид $\operatorname{grad} \Phi_k = 0$ и приводит к следующей системе трех уравнений для определения ρ, θ, τ:

$$\begin{gathered} (-1)^k \sigma'\tau + r\cos(\theta - \gamma) - \frac{c\tau}{\sqrt{gH}} \cos\theta = 0, \\ -r\sin(\theta - \gamma) + \frac{c\tau}{\sqrt{gH}} \sin\theta = 0, \\ (-1)^k \sigma - \rho \frac{c}{\sqrt{gH}} \cos\theta - \omega \sqrt{\frac{H}{g}} = 0, \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{12}$$

В силу симметрии волнового движения относительно оси абсцисс, можно принять, что $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$.

Пусть $k = 1$, тогда существует острый угол γ_1 такой, что при $\gamma = \gamma_1$ система (12) имеет единственное решение. Эта система имеет два решения, если $\gamma < \gamma_1$, и не имеет ни одного решения, если $\gamma > \gamma_1$. Пусть эти решения будут обозначены через ρ_{1l}, τ_{1l}, θ_{1l}, $l = 1, 2$, и пусть $\theta_{11} < \theta_{12}$. Тогда приближенная формула для ζ_1 имеет вид

$$\zeta_1 = \sum_{l=1}^{2} \zeta_{1l} + O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{13}$$

$$\zeta_{1l} = \begin{cases} A(\theta_{1l}) \dfrac{\exp(i\Phi_{1l})}{\sqrt{r}}, & \text{если } \gamma < \gamma_1 - \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \gamma > \gamma_1' + \varepsilon, \quad l = 1, 2. \end{cases} \tag{14}$$

$$\Phi_{1l} = \omega t + r\rho_{1l} \cos(\theta_{1l} - \gamma) + \frac{\pi}{4}(-1)^{l+1}, \quad l = 1, 2. \tag{15}$$

$A(\theta)$ — некоторая действительная функция и $\varepsilon > 0$.

Выражение для ζ_{11} описывает семейство продольных волн, а выражение для ζ_{12} — семейство поперечных волн. Оба эти семейства волн перемещаются от начала координат в бесконечность внутри своего сектора существования.

Для исследования разрешимости системы (12) при $k = 2$ необходимо ввести функцию $c_0 = c_0(\omega)$, параметрически определяемую равенствами

$$\omega = \sigma - \rho\sigma', \qquad c_0 = \sigma'. \tag{16}$$

Функция c_0 монотонно убывает от 1 до 0 с ростом ω от 0 до $+\infty$, причем $dc_0 / d\omega = +\infty$ при $\omega \to +0$.

Если $k = 2$, то при решении системы (12) могут представиться два случая, которые следует рассмотреть последовательно.

I. $c / \sqrt{gH} < c_0(\omega\sqrt{H / g})$. В этом случае существует острый угол γ_2 такой, что при $\gamma = \gamma_2$ система (12) имеет два решения. Если $\gamma < \gamma_2$, то эта система имеет три решения, а если $\gamma > \gamma_2$, то одно. Пусть ρ_{2m}, τ_{2m}, θ_{2m}, $m = 1, 2, 3$, являются этими решениями. Областью определения функций

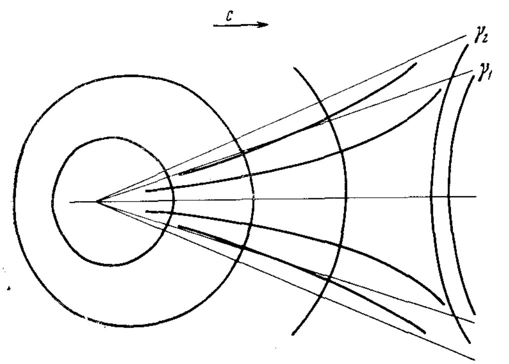

Рис. 1

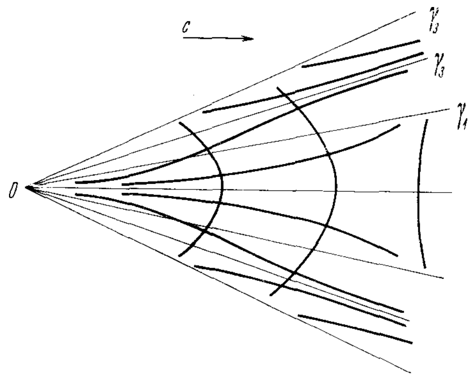

Рис. 2

ρ_{2m}, τ_{2m}, θ_{2m} при $m = 1, 2$ будет являться отрезок $[0, \gamma_2]$, а областью определения функций ρ_{23}, τ_{23}, θ_{23} — отрезок $[0, \pi]$. Теперь может быть найдена асимптотическая формула для ζ_2, имеющая вид

$$\zeta_2 = \sum_{m=1}^{3} \zeta_{2m} + O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{17}$$

$$\zeta_{2m} = \begin{cases} A(\theta_{2m}) \dfrac{\exp(i\Phi_{2m})}{\sqrt{r}}, & \text{если } \gamma < \gamma_2 - \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \gamma > \gamma_2 + \varepsilon, \end{cases} \tag{18}$$

при $m = 1, 2$ и

$$\zeta_{23} = A(\theta_{23}) \frac{\exp(i\Phi_{23})}{\sqrt{r}}. \tag{19}$$

Здесь

$$\Phi_{2m} = \omega t + r\rho_{2m}\cos(\theta_{2m} - \gamma) + \frac{\pi}{4}(-1)^{m+1}, \quad m = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Волны ζ_{21} и ζ_{22}, представляющие соответственно семейства продольных и поперечных волн, перемещаются из бесконечности в сторону начала координат внутри своего сектора существования, а волны ζ_{23} образуют семейство кольцевых волн, перемещающихся от начала координат в бесконечность.

Справедливо неравенство

$$\gamma_1(\omega, c) < \gamma_2(\omega, c), \tag{21}$$

поэтому область существования волн ζ_{21} и ζ_{22} включает область существования волн ζ_{11} и ζ_{12}.

Общая волновая картина в случае I изображена на рис. 1.

II. $c / \sqrt{gH} > c_0(\omega\sqrt{H / g})$. В этом случае разрешима относительно γ следующая система двух уравнений:

$$\frac{\omega\sqrt{H}}{\sqrt{g}} = \sigma - \rho\sigma', \qquad \frac{c}{\sqrt{gH}} \sin\gamma = \sigma'. \tag{22}$$

Наименьший положительный корень системы (22) будет обозначен через γ_3.

В случае II существует единственный острый угол γ_4 такой, что при $\gamma = \gamma_4$, $k = 2$ система (12) имеет единственное решение относительно ρ, τ, θ. В общем случае эта система определяет функции $\rho_{3n} = \rho_{3n}(\gamma)$, $\xi_{3n} = \tau_{3n}(\gamma)$, $\theta_{3n} = \theta_{3n}(\gamma)$, $n = 1, 2, 3$. Областью определения функций ρ_{31}, τ_{31}, θ_{31} является отрезок $[0, \gamma_4]$, областью определения ρ_{32}, τ_{32}, θ_{32} — отрезок $[\gamma_3, \gamma_4]$, а областью определения ρ_{33}, τ_{33}, θ_{33} — отрезок $[0, \gamma_3]$. Теперь может быть найдена приближенная формула для ζ_2, которая в данном случае имеет вид

$$\zeta_2 = \sum_{n=1}^{3} \zeta_{3n} + O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{23}$$

$$\zeta_{3n} = \begin{cases} A(\theta_{3n}) \dfrac{\exp(i\Phi_{3n})}{\sqrt{r}}, & \text{если } \gamma < \gamma_{1/2(9-n)} - \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \gamma > \gamma_{1/2(9-n)} + \varepsilon, \end{cases} \tag{24}$$

при $n = 1, 3$ и

$$\zeta_{32} = \begin{cases} A(\theta_{32}) \dfrac{\exp(i\Phi_{32})}{\sqrt{r}}, & \text{если } \gamma_4 - \varepsilon > \gamma > \gamma_3 + \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \gamma < \gamma_3 - \varepsilon, \quad \gamma > \gamma_4 + \varepsilon. \end{cases} \tag{25}$$

$$\Phi_{3n} = \omega t + r\rho_{3n}\cos(\theta_{3n} - \gamma) + \frac{\pi}{4}(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3. \tag{26}$$

Линии равной фазы семейства волн ζ_{31} представляют кривые, которые опираются своими концами на лучи $\gamma = \gamma_4$ и $\gamma = 2\pi - \gamma_4$. Семейство волн ζ_{32} перемещается в двух секторах $\gamma_3 < \gamma < \gamma_4$ и $2\pi - \gamma_4 < \gamma < 2\pi - \gamma_3$. Линии равной фазы этого семейства волн имеют своими асимптотами лучи $\gamma = \gamma_3$ и $\gamma = 2\pi - \gamma_3$. Волны ζ_{31} и ζ_{32} перемещаются от начала координат в бесконечность.

Волны ζ_{33} представляют семейство продольных волн, движущихся из бесконечности в сторону начала координат в секторе, ограниченном лучами $\gamma = \gamma_3$ и $\gamma = 2\pi - \gamma_3$. Границы указанного сектора являются асимптотами для линий равной фазы этих волн.

Справедливы неравенства

$$\gamma_1(\omega, c) < \gamma_3(\omega, c) < \gamma_4(\omega, c). \tag{27}$$

Общий вид волновой картины в случае II показан на рис. 2.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. С. С. Войту за руководство и помощь в работе и члену-корреспонденту АН СССР Л. Н. Сретенскому за советы и обсуждение полученных результатов.

Московский физико-технический институт
г. Долгопрудный, Моск. обл.

Поступило
14 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Н. Сретенский, Тр. Московск. Матем. общ., 3, 3 (1954). [2] K. Eggers, Schiff u. Hafen, 9, № 11, 874 (1957). [3] J. N. Newman, J. Ship Res., 3, № 1, 1 (1959). [4] M. J. Lighthill, J. Fluid Mech., 27, № 4, 725 (1967). [5] T. Navelock, Proc. Roy. Soc., A, 81, 398 (1908). [6] Л. В. Черкасов, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 4, 70 (1968).