Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.512.6 *МАТЕМАТИКА*

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, М.-Б. А. БАБАЕВ

ОБ ОЦЕНКАХ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОСРЕДСТВОМ СУММ ДВУХ ФУНКЦИЙ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

В совместной работе авторов (1) были предложены способы нахождения наилучшей приближающей функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $\Pi_{k,q}$ (см. (2)) суммами вида

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) + \psi(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \varphi(x_{\bar{k}}) + \psi(y_{\bar{q}}).$$

К этой категории относится также ряд работ, где установлены простые способы вычисления значения наилучшего приближения (3-5) и способы нахождения наилучшей приближающей функции (2, 6).

В настоящей заметке дается понятие производной по группам переменных, являющееся дальнейшим развитием понятия производной по направлению, указываются способы ее вычисления. Далее определяется класс $\Pi_{k,q}^{(\lambda)}$ являющийся обобщением класса $\Pi_{k,q}$, и при помощи производной по группам переменных находятся достаточные условия принадлежности функции многих переменных этому классу. Затем мы указываем способ вычисления наилучшего приближения функции $f \in \Pi_{k,q}^{(\lambda)}$ посредством $\varphi(x_{\bar{k}}) + \psi(y_{\bar{q}})$ и находим точные двухсторонние оценки значения такого приближения функции, у которой существует лишь смешанная производная по группам переменных $x_{\bar{k}}$ и $y_{\bar{q}}$.

Рассмотрим функцию $f = f(x_1, \ldots, x_n) = f(p) = f(x_{\bar{\alpha}}, p/x_{\bar{\alpha}})$, определенную в некоторой области Q эвклидова пространства R_n. Зафиксируем некоторую группу переменных $x_{\bar{\alpha}} = (x_1, \ldots, x_\alpha)$, $\alpha \leqslant n$, и произвольный вектор $\bar{a} = [\nu_1, \ldots, \nu_\alpha]$, где ν_i, $i = 1, 2, \ldots, \alpha$, — вещественные числа. Величину

$$f'_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}|} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_{\bar{\alpha}} + s\bar{a},\ p/x_{\bar{\alpha}}) - f(p)}{s \sum\limits_{i \in \bar{\alpha}} |\nu_i|},$$

где s — положительное число, назовем **производной** (первого порядка) функции f по группе переменных $x_{\bar{\alpha}}$ в направлении вектора $\bar{a}$. Будем говорить, что функция f имеет **λ-производную по группе переменных** $x_{\bar{\alpha}}$, если она имеет производную по группе переменных $x_{\bar{\alpha}}$ в направлении произвольного вектора $\bar{a} = [\nu_1, \ldots, \nu_\alpha]$, удовлетворяющего условию

$$0 \leqslant 1/\lambda \leqslant |\nu_i/\nu_j| \leqslant \lambda; \quad i, j \in \bar{\alpha}. \tag{1}$$

Символически запись $f'_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}_\lambda|}$ означает, что функция f имеет такую производную. При $\lambda \to 1$ класс функций, имеющих $f'_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}_\lambda|}$, расширяется. Самый узкий класс — это класс функций, имеющих $f'_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}_\infty|} = f'_{x_{\bar{\alpha}}}$, где на приращения $s\nu_i$, $i \in \bar{\alpha}$, никаких ограничений не поставлено. В случае, когда знаки координат вектора $\bar{a}$ положительны, будем пользоваться соответственно обозначениями $f'_{x_{\bar{\alpha}}, [a]}, f'_{x_{\bar{\alpha}}, [\bar{a}_\lambda]}$. Если $x_{\bar{\alpha}}$ состоит из одной переменной, то $f'_{x_{\bar{\alpha}}, [\bar{a}]}$ превращается в обычную частную производную. Справедлива

Лемма 1. *Пусть существуют частные производные f'_{x_i}, $i \in \bar{\alpha}$.*

Тогда существует производная по группе переменных $x_{\bar{\alpha}}$ в направлении произвольного вектора $\bar{a} = [\nu_1, \ldots, \nu_\alpha]$ и она может быть вычислена формулой

$$f'_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}|} = \frac{1}{|\nu_1| + \ldots + |\nu_\alpha|} \sum_{i \in \bar{\alpha}} \nu_i f'_{x_i}.$$

Замечание. Класс функций, имеющих производную $f'_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}|}$, шире класса функций, имеющих обычные частные производные f_{x_i}, $i \in \in \bar{\alpha}$. Например, функция $f = |xy|$ при $x = 0$, $y = 0$ частных производных не имеет, но для произвольного вектора $\bar{a} = [\nu_1, \nu_2]$ $f'_{(xy), |\bar{a}|}(0, 0) = 0$. В частности, когда группа $x_{\bar{\alpha}}$ состоит из всех переменных $x_{\bar{\alpha}} = x_1, \ldots, {}_n$, между обычной производной по направлению и производной $f'_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}|}$ имеется следующая связь.

Лемма 2. *Для того чтобы существовала производная первого порядка по всем переменным $f'_{x_{1,\ldots,n}, |\bar{a}|}$ в направлении вектора $\bar{a} = [\nu_1, \ldots, \nu_n]$, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная по направлению $\partial f / \partial \bar{a}$, причем справедлива формула*

$$f'_{x_{1,\ldots,n}, |\bar{a}|} = \frac{\sqrt{\nu_1^2 + \ldots + \nu_n^2}}{|\nu_1| + \ldots + |\nu_n|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{a}}.$$

(λ-*производную порядка m по группе $x_{\bar{\alpha}}$ определим рекуррентно*:

$$f^{(m)}_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}_\lambda|} = \left[f^{(m-1)}_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}_\lambda|} \right]_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}_\lambda|}).$$

Смешанную производную порядка $(\beta_1 + \ldots + \beta_m)$ в смысле $[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ по системе $\eta = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m)$ определим через

$$f^{(\beta_1 + \ldots + \beta_m)}_{x_{\bar{\alpha}_1} \ldots x_{\bar{\alpha}_m}, \left| \bar{a}_{\lambda_1}, \ldots, \bar{a}_{\lambda_m} \right|} = \left[\left(f^{(\beta_1)}_{x_{\bar{\alpha}_1}, |\bar{a}_{\lambda_1}|} \right)^{(\beta_2)}_{x_{\bar{\alpha}_2}, |\bar{a}_{\lambda_2}|} \ldots \right]^{(\beta_m)}_{x_{\bar{\alpha}_m}, |\bar{a}_{\lambda_m}|}.$$

В частности, при $\beta_1 = \ldots = \beta_m$ получаем смешанную производную в смысле $[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ по системе $\eta = (\bar{\alpha}_1, \ldots \bar{\alpha}_m) : f^{(m)}_{x_{\bar{\alpha}_1} \ldots x_{\bar{\alpha}_m}, \left| \bar{a}_{\lambda_1}, \ldots, \bar{a}_{\lambda_m} \right|}$, а если, кроме этого, $\lambda_1 = \ldots \lambda_m = \lambda$, то смешанную производную в смысле λ по системе $\eta : f^{(m)}_{x_{\bar{\alpha}_1} \ldots x_{\bar{\alpha}_m}, |\bar{a}_\lambda|}$.

Лемма 3. *Пусть существуют обычные смешанные производные* $f^{(m)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_m}}$, $i_j \in \bar{\alpha}$, $j = 1, \ldots, m$.

Тогда производная k-го порядка по группе переменных $x_{\bar{\alpha}} = (x_1, \ldots, x_\alpha)$ в направлении произвольного вектора $\bar{a} = [\nu_1, \ldots, \nu_\alpha]$, существует и может быть вычислена формулой

$$f^{(m)}_{x_{\bar{\alpha}}, |\bar{a}|} = \frac{1}{(|\nu_1| + \ldots + |\nu_\alpha|)^m} \sum_{i_1 \in \bar{\alpha}} \ldots \sum_{i_m \in \bar{\alpha}} \nu_{i_1} \ldots \nu_{i_m} f^{(m)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_m}} =$$

$$= \frac{1}{(|\nu_1| + \ldots + |\nu_\alpha|)^m} \sum_{i_1 + \ldots + i_m = m}^{m\alpha} \nu_{i_1} \ldots \nu_{i_m} f^{(m)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_m}}.$$

Теорема 1. *Пусть существуют обычные смешанные производные*

$$f^{(\beta_1 + \ldots + \beta_m)}_{x_{i_{11}} \ldots x_{i_{m\beta_m}}}, \quad i_{kq_k} \in \bar{\alpha}_k; \quad k = 1, \ldots, m, \quad q_k = 1, \ldots, \beta_k.$$

Тогда существует смешанная производная порядка $(\beta_1 + \ldots + \beta_m)$ по системе $\eta = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m)$ в направлении соответствующих векторов

$\bar{a}_k = [\nu_{k1}, \ldots, \nu_{k\alpha_k}]$ *и она вычисляется по формуле*

$$f^{(\beta_1+\ldots+\beta_m)}_{x_{\bar{\alpha}_1}\ldots x_{\bar{\alpha}_m}, |\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m|} = \frac{\sum\limits_{i_{11}+\ldots+i_{1\beta_1}=\beta_1}^{\beta_1\alpha_1} \cdots \sum\limits_{i_{m1}+\ldots+i_{m\beta_m}=\beta_m}^{\beta_m\alpha_m} \nu_{1i_{11}} \cdots \nu_{mi_{m\beta_m}} f^{(\beta_1+\ldots+\beta_m)}_{x_{i_{11}}\ldots x_{i_{m\beta_m}}}}{\prod\limits_{k=1}^{m} (|\nu_{k1}| + \ldots + |\nu_{k\alpha_k}|)^{\beta_k}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_{11}=1}^{\alpha_1} \cdots \sum\limits_{i_{1\beta_1}=1}^{\alpha_1} \cdots \sum\limits_{i_{m1}=1}^{\alpha_m} \cdots \sum\limits_{i_{m\beta_m}=1}^{\alpha_m} \nu_{1i_{11}} \cdots \nu_{mi_{m\beta_m}} f^{(\beta_1+\ldots+\beta_m)}_{x_{i_{11}}\ldots x_{i_{m\beta_m}}}}{\prod\limits_{k=1}^{m} (|\nu_{k1}| + \ldots + |\nu_{k\alpha_k}|)^{\beta_k}}.$$

При $\beta_1 = \ldots = \beta_m = 1$ из теормы 1 получается

Следствие. *Смешанная производная по системе* $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m)$ *в направлении векторов* $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ *вычисляется по формуле*

$$f^{(m)}_{x_{\bar{\alpha}_1}\ldots x_{\bar{\alpha}_m}, |\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m|} = \frac{\sum\limits_{i_1\in\bar{\alpha}_1} \cdots \sum\limits_{i_m\in\bar{\alpha}_m} \nu_{1i_1} \cdots \nu_{mi_m} f^{(m)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_m}}}{\prod\limits_{k=1}^{m} (|\nu_{k1}| + \ldots + |\nu_{k\alpha_k}|)}.$$

Функцию $f = f(x_{\bar{\alpha}}, p/x_{\bar{\alpha}})$, назовем монотонно возрастающей по группе переменных $x_{\bar{\alpha}}$ в направлении вектора $\bar{a} = [\nu_1, \ldots, \nu_\alpha]$, если для произвольных

$$x''_{\bar{\alpha}} \geqslant x'_{\bar{\alpha}} \text{ (т. е. } x''_1 \geqslant x'_1, \ldots, x''_\alpha \geqslant x'_\alpha), \quad \frac{x''_i - x'_i}{x''_j - x'_j} = \frac{\nu_i}{\nu_j}, \quad i, j \in \bar{\alpha},$$

имеет место $f(x''_{\bar{\alpha}}, p/x_{\bar{\alpha}}) \geqslant f(x'_{\bar{\alpha}}, p/x_{\bar{\alpha}})$.

Будем говорить, что функция f является монотонно возрастающей по группе переменных $x_{\bar{\alpha}}$ в смысле λ (или λ-монотонно возрастающей), если она монотонно возрастает по группе $x_{\bar{\alpha}}$ в направлении произвольного вектора $\bar{a}$, удовлетворяющего (1).

Лемма 4. *Если* $f'_{x_{\bar{\alpha}}, [\bar{a}_\lambda]} \geqslant 0$, *то функция* f *является* λ*-монотонно возрастающей по группе* $x_{\bar{\alpha}}$.

Обозначим через $\Pi^{(\lambda)}_{k,q}$ класс функций f, для которых при произвольных $x''_{\bar{k}} \geqslant x'_{\bar{k}}$, $y''_{\bar{q}} \geqslant y'_{\bar{q}}$ справедливо неравенство

$$f(x''_{\bar{k}}, y''_{\bar{q}}) + f(x'_{\bar{k}}, y'_{\bar{q}}) \geqslant f(x''_{\bar{k}}, y'_{\bar{q}}) + f(x'_{\bar{k}}, y''_{\bar{q}}), \tag{2}$$

где

$$0 \leqslant \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{x''_i - x_i}{x''_j - x'_j} \leqslant \lambda; \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Очевидно, $\Pi^{(\lambda_2)}_{k,q} \subset \Pi^{(\lambda_1)}_{k,q}$ при $\lambda_1 < \lambda_2$, т. е. при $\lambda \to 1$ класс $\Pi^{(\lambda)}_{k,q}$ расширяется; при $\lambda = \infty$ класс $\Pi^{\infty}_{k,q}$ совпадает с классом $\Pi^{(\lambda)}_{k,q}$ ([2]). Обозначим через $\Pi^{(\lambda)}_{k,q}(Q)$ класс функций $f \in \Pi^{(\lambda)}_{k,q}$ в области Q. Пусть $Q = [a_1, b_1; \ldots \ldots; a_n, b_n]$. Рассмотрим приближение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенной в Q суммами вида $\varphi(x_{\bar{k}}) + \psi(y_{\bar{q}})$. Определим наилучшее приближение через

$$E_f = \inf_{\varphi(x_{\bar{k}})+\psi(y_{\bar{q}})\in C(Q)} \|f - \varphi - \psi\|_C.$$

Теорема 2. *Значение наилучшего приближения непрерывной функции* $f \in \Pi^{(\lambda)}_{k,q}(Q)$ *может быть вычислено формулой*

$$E_f = {}^1/_4\,[f(b_{\bar{k}}, b_{\bar{q}}) + f(a_{\bar{k}}, a_{\bar{q}}) - f(b_{\bar{k}}, a_{\bar{q}}) - f(a_{\bar{k}}, b_{\bar{q}})].$$

Если существуют хотя бы две точки $(x_{\bar k}^{00}, y_{\bar q}^{00})$ и $(x_{\bar k}^{0}, y_{\bar q}^{0})$, $x_{\bar k}^{00} \geqslant x_{\bar k}^{0}$, $y_{\bar q}^{00} \geqslant y_{\bar q}^{0}$, *для которых в* (2) *имеется знак строгого неравенства, то наилучшая приближающая функция не единственна.*

Доказательство теоремы 2 основывается на доказательстве этого результата для класса $\Pi_{k,q}(Q)$, который ранее был установлен М-Б. А. Бабаевым. Здесь надо иметь в виду, что координаты произвольных пар точек $(x_{\bar k}'', y_{\bar q}'')$, $(x_{\bar k}', y_{\bar q}')$ прямоугольника Q с $x_{\bar k}'' \geqslant x_{\bar k}'$, $y_{\bar q}'' \geqslant y_{\bar q}'$ удовлетворяют соотношению (3).

Лемма 5. *Если* $f''_{x_{\bar k} y_{\bar q}, [\bar a_\lambda]} \geqslant 0$, то $f \in \Pi_{k,q}^{(\lambda)}$.

Замечание. Из леммы 5 видно, что для того чтобы $f \in \Pi_{k,q}^{(\lambda)}$, достаточно неотрицательности смешанной производной по направлению векторов лишь с положительными координатами.

Одним из результатов приведенной вспомогательной работы является

Теорема 3. *Если*

$$f \in C(Q), \quad f''_{x_{\bar k} y_{\bar q}, [\bar a_\lambda]} \in C(Q), \quad Q: a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то справедливы точные оценки

$$|L_f| \leqslant E_f \leqslant \frac{M}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} (b_i - a_i)(b_j - a_j) + L_f, \tag{4}$$

$$L_f = {}^1/_4 [f(b_{\bar k}, b_{\bar q}) + f(a_{\bar k}, a_{\bar q}) - f(b_{\bar k}, a_{\bar q}) - f(a_{\bar k}, b_{\bar q})],$$

$$M = \begin{cases} \sup\limits_{[\bar a_1, \bar a_2] \subset [\bar a_\lambda]} \ \sup\limits_{E\left\{p : f''_{x_{\bar k} y_{\bar q}, [\bar a_\lambda]} < 0\right\}} \left| f''_{x_{\bar k} y_{\bar q}, [\bar a_\lambda]}(p) \right|, & \text{если } f''_{x_{\bar k} y_{\bar k}, [\bar a_\lambda]} \\ \text{имеет отрицательные значения}; & \\ 0, & \text{если } f''_{x_{\bar k} y_{\bar q}, [\bar a_\lambda]} \geqslant 0. \end{cases}$$

Замечание. Нетрудно убедиться, что если при условиях теоремы 3 $f''_{x_{\bar k} y_{\bar q}, [\bar a_\lambda]} \geqslant 0$, то в силу теоремы 2 неравенства (4) превращаются в равенства, что и доказывает точность оценок (4).

Следствие 1. *При условиях теоремы 3 справедливы точные оценки*

$$|L_f| \leqslant E_f \leqslant \frac{A}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+2}^{n} (b_i - a_i)(b_j - a_j) - |L_f|,$$

$$A = \sup_{[\bar a_1, \bar a_2] \subset [\bar a_\lambda]} \ \sup_{p \in Q} \left| f''_{x_{\bar k} y_{\bar q}, [\bar a_\lambda]}(p) \right|.$$

Следствие 2. *Если при условиях теоремы* $f''_{x_{\bar k} y_{\bar q}, [\bar a_\lambda]}$ *сохраняет знак, то*

$$E_f \leqslant {}^1/_4 A \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} (b_i - a_i)(b_j - a_j)$$

(*константа A определена выше*).

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
27 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Ибрагимов, М-Б. А. Бабаев, ДАН, 197, № 4, 766 (1971). [2] М-Б. А. Бабаев, Матер. научной конфер., посвящ. 50-летию Азербайджана и КП Азербайджана, Баку, 1971, стр. 33. [3] T. J. Rivlin, R. J. Sibner, Am. Math. Monthly, 72, № 10, 1101 (1965). [4] Leopold Flatto, Am. Math. Monthly, 73, № 4, 131 (1966). [5] В. М. Мордашев, ДАН, 183, № 4, 778 (1968). [6] М-Б. А. Бабаев, ДАН, 193, № 5, 967 (1970).