Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

МАТЕМАТИКА

ИНДРЖИХ НЕЧАС (JINDŘICH NEČAS)

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 VI 1971)

1. С появлением ряда работ об альтернативе Фредгольма для нелинейных операторов (см. ([1–5])) фундаментальным стал вопрос о структуре спектра. Теория категории множества Люстерника — Шнирельмана дает существование счетного множества собственных значений для потенциальных операторов (см. ([6])).

В этой работе доказывается, что нормированные собственные элементы нелинейного, но однородного уравнения Штурма — Лиувилля изолированные, из чего немедленно следует, что спектр дискретный.

2. Символом W_n^1 будем обозначать пространство Соболева действительных, абсолютно непрерывных функций на замкнутом интервале $\langle 0, 1\rangle$ с производными, принадлежащими пространству L_p, и с нормой

$$\|u\|_{1,p} \equiv \left(\int_0^1 (|u'|^p + |u|^p)\,dx\right)^{1/p};$$

$$V_1 \equiv \{u \in W_p^{(1)} / u(0) = u(1) = 0\} \equiv \mathring{W}_p^{(1)}, \quad V_2 \equiv \{u \in W_p^{(1)} / u(0) = 0\},$$

$$V_3 \equiv \{u \in W_p^{(1)} / u(1) = 0\}, \quad V_4 \equiv W_p^{(1)}.$$

Символом $C^{(i),\varkappa}$ будем обозначать пространства Шаудера непрерывных функций на $\langle 0, 1\rangle$ с производными вплоть до порядка i, непрерывными по Гёльдеру с показателем $\varkappa$. Норма означается $\|u\|^{i,\varkappa}$. Полагаем $C^{(i),0} = C^{(i)}$.

Пусть определены $a \in C^{(1)}$, $a(x) > 0$, $b \in C^{(0)}$, $b(x) \geqslant 0$, $c \in C^{(0)}$, $c(x) > 0$ и постоянные $A_0 \geqslant 0$, $A_1 \geqslant 0$. В дальнейшем всегда $p \geqslant 2$.

Функция $u \in V_i$ является собственным элементом и λ — соответствующим собственным числом нелинейного уравнения Штрума — Лиувилля $-(a|u'|^{p-2}u')' + (b - \lambda c)|u|^{p-2}u = 0$, если для всякого $v \in V_i$

$$\int_0^1 (a|u'|^{p-2}u'v' + (b - \lambda c)|u|^{p-2}uv)\,dx + A_0|u(0)|^{p-2}u(0)v(0) + A_1|u(1)|^{p-2}u(1)v(1) = 0. \tag{1}$$

В случае V_4 предполагается $A_0 + A_1 > 0$.

Из (1) немедленно следует, что наименьшее собственное число $\lambda_1 > 0$. В дальнейшем предполагается

$$\lambda_1 c(x) - b(x) > 0. \tag{2}$$

Теорема. *У нелинейного уравнения Штурма — Лиувилля точно счетное множество собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, причем $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.*

Множество нормированных собственных элементов изолированное. Всякому собственному числу соответствует конечное множество нормированных собственных элементов, которое с каждым своим элементом и содержит u $(-u)$.

Замечание 1. Существование счетного числа собственных значений λ_k, для которых $\Lambda_K \to \infty$, доказывается, например, в ([6]). Надо только заметить, что $W_p^{(1)}$ и рассматриваемые подпространства являются пространствами с базисом Шаудера, который немедленно можно построить, исходя из базиса в L_p.

Замечание 2. Если рассматривать пространство $\mathring{W}_p^{(1)}$ как полуупорядоченное при помощи конуса положительных функций, то легко доказать, что наименьшему собственному числу λ_1 соответствуют точно два собственных нормированных элемента u и $(-u)$. Элемент u положительный в открытом интервале $(0, 1)$. Если v — собственный элемент, соответствующий собственному числу $\lambda_i > \lambda_1$, то существует хотя бы одна **внутренняя точка,** где $v(x_0) = 0$.

3. В дальнейшем будем вместо Штурма — Лиувилля писать Ш.Л.

Для точки $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ определим функцию

$$M_{x_0}(x) \equiv a(x)\,|u'(x)|^{p-2}u'(x) + \int_{x_0}^{x} (\lambda c(\xi) - b(\xi))\,|u(\xi)|^{p-2}u(\xi)\,d\xi.$$

Если u — собственный элемент, то из (1) следует, что почти всюду

$$M_{x_0}(x) = \int_0^1 M_{x_0}(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Будем рассматривать только такие собственные числа, для которых $\lambda \leqslant N$, и собственные элементы, лежащие в шаре $\|u\|_{1,p} \leqslant 2$, где N — любое, но фиксированное натуральное число. Из (3) немедленно следует

Лемма 1. $\|u\|^{1,1/(p-1)} \leqslant c$.

Лемма 2. *Для* $x \in \langle 0, 1\rangle$

$$|u(x)| + |u'(x)| > 0, \tag{4}$$

если $u'(x_0) = 0$, *то*

$$(a(x)\,|u'(x)|^{p-2}u'(x))'_{x=x_0} \neq 0. \tag{5}$$

Доказательство. Если $|u(x_0)| + |u'(x_0)| = 0$, то

$$M_{x_0}(x) = 0 \tag{6}$$

почти всюду. Имеем далее

$$|u(x)| \leqslant c_1|x - x_0|. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получаем оценку $|u(x)| \leqslant c_1c_2|x - x_0|^2$ и последовательно после k шагов

$$|u(x)| \leqslant c_1c_2^k\,|x - x_0|^{1+k}. \tag{8}$$

Устремляя $k \to \infty$, получаем из (8) на интервале $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap \cap \langle 0, 1\rangle$ для $\delta < c_2^{-1}$ $u(x) \equiv 0$, и отсюда $u(x) \equiv 0$ на всем интервале $\langle 0, 1\rangle$, что невозможно. (5) следует из (4), (6) и условия (2).

Обозначая (v^*, v) значение функционала v^* в элементе $v \in V_i$, определим $T\colon V_i \to V_i^*$, полагая

$$(Tv, w) \equiv \int_0^1 (a\,|v'|^{p-2}v'w' + b\,|v|^{p-2}vw)\,dx +$$
$$+ A_0\,|v(0)|^{p-2}v(0)\,w(0) + A_1\,|v(1)|^{p-2}v(1)\,w(1),$$

и $S\colon V_i \to V_i^*$, полагая $(Sv, w) \equiv \int_0^1 c\,|v|^{p-2}vw\,dx$. Операторы T и S непрерывно дифференцируемы в смысле Фреше и

$$(dT(v)h, w) = (p-1)\int_0^1 (a\,|v'|^{p-2}h'w' + b\,|v|^{p-2}hw)\,dx +$$
$$+ (p-1)A_0\,|v(0)|^{p-2}h(0)\,w(0) + (p-1)A_1\,|v(1)|^{p-2}h(1)\,w(1), \tag{9}$$

$$(dS(v)h, w) = (p-1)\int_0^1 c\,|v|^{p-2}hw\,dx. \tag{10}$$

Пусть $\rho(x) = |u'(x)|^{p-2}$ и пусть

$$W^{(1)}_{2,\rho} \equiv \left\{h \,\middle|\, \int_0^1 ((h')^2 + h^2)\,\rho\,dx \equiv \|h\|^2_{1,2,\rho} < \infty\right\}.$$

Лемма 3. *Если* $1 \leqslant 2 < 2(p-1)/(2p-3)$, *то* $W^{(1)}_{2,\rho} \subset W^{(1)}_2$ *алгебраически и топологически. Если* $\mathring{W}^{(1)}_{2,\rho} \equiv \{h \in W^{(1)}_{1,\rho} \,|\, h(0) = h(1) = 0\}$, *то в* $\mathring{W}^{(1)}_{1,\rho}$ *плотно множество линейных комбинаций* $\sin n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство первой части следует из (5) и неравенства Гёльдера.

В пространстве $\mathring{W}^{(1)}_{2,\rho}$ можно ввести скалярное произведение $\int_0^1 |u'|^{p-2}h'k'dx$. Если $\int\limits_0^1 |u'|^{p-2}h' \cos n\pi x \, dx = 0$ для $n = 1, 2, \ldots,$ то $|u'|^{p-2}h' = c$. Если $c > 0$, то за исключением конечного множества точек, где $u'(x) = 0$, $h'(x) > 0$, что невозможно, так как $0 = h(1) - h(0) = \int\limits_0^1 h'(x)dx$.

Обозначим $V_{1,\rho} \equiv \mathring{W}^{(1)}_{2,\rho}$, $V_{2,\rho} \equiv \{h \in W^{(1)}_{1,\rho} \,|\, h(0) = 0\}$, $V^{(1)}_{3,\rho} \equiv \{h \in W^{(1)}_{2,\rho} \,|\, h(1) = 0\}$, $V_{4,\rho} \equiv W^{(1)}_{2,\rho}$.

Проблемой Ш.Л. в вариациях называется следующая: найти функцию $h \in V_{i,\rho}$, $h \not\equiv 0$, и μ такое, что $dT(u)h - \mu \, dS(u)h = 0$.

Если $f \in V^*_{i,\rho}$, то слабым решением уравнения в вариациях с правой частью f называется такое $h \in V_{i,\rho}$, что $dT(u)h - \mu \, dS(u)h = f$.

Лемма 4. *Если h — решение проблемы Ш.Л. в вариациях, то функция $|u'|^{p-2}h'$ удовлетворяет условию Липшица и μ простое.*

Доказательство. Полагая $N_{x_0}(x) \equiv a(x)|u'(x)|^{p-2}h'(x) + \int\limits_{x_0}^{x} (\mu c(\xi) - b(\xi))|u(\xi)|^{p-2}h(\xi)d\xi$, получаем, что почти всюду $N_{x_0}(x) = \int\limits_0^1 N_{x_0}(x)dx$, откуда следует первое утверждение.

В случае V_i, $i = 1, 2, 3$, хотя в одном конце интервала $\langle 0, 1\rangle$ $u = 0$ (и, значит, $u' \neq 0$) и $h = 0$. Для V_4 имеем $A_0 + A_1 > 0$, пусть $A_0 > 0$. Но $a(0)|u'(0)|^{p-2}u'(0) + A_0|u(0)|^{p-2}u(0) = 0$ и, ввиду (4), $u'(0) \neq 0$. Для определенности предположим $u'(0) \neq 0$. Но h' в окрестности нуля непрерывна и

$$A_0|u(0)|^{p-2}h(0) - a(0)|u'(a)|^{p-2}h'(0) = 0. \tag{11}$$

Если μ непростое, то для $i = 1, 2$ существует собственный элемент h такой, что $h(0) = h'(0) = 0$. Тогда $N_0(x) = 0$, из чего, ввиду (5), следует, что h удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра с непрерывным ядром и нулевой правой частью. Значит, $h \equiv 0$, что невозможно. Для V_4 можно найти собственный элемент такой, что $h(0) = 0$. Но из (11) следует $h'(0) = 0$ и получается опять противоречие.

Лемма 5. *Если u_1, u_2 — два собственных элемента такие, что $\|u\|_{1,p} = 1$ и $\|u_1 - u_2\|_{1,p} \leqslant 1/2$, то*

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant c\|u_1 - u_2\|^2_{1,2}. \tag{12}$$

Доказательство. λ и u — собственное число и элемент соответственно тогда и только тогда, когда для

$$\Phi(u) \equiv \frac{\int\limits_0^1 (a|u'|^p + b|u|^p)dx + A_0|u(0)|^p + A_1|u(1)|^p}{\int\limits_0^1 c|u|^p dx},$$

$\Phi(u) = \lambda$ и $d\Phi(u)h = 0$ для $h \in V$. Но функционал Φ два раза непрерывно дифференцируем по Фреше, из чего $\lambda_2 - \lambda_1 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 d^2\Phi(u_1 + t\tau(u_2 - u_1))$, $u_2 - u_1$, $t(u_2 - u_1)dt\,d\tau$, откуда в силу леммы 5 следует (12).

4. Доказательство теоремы. Мы покажем, что собственные элементы изолированные. Пусть это не так. Тогда существуют собствен-

ные элементы u_n, $u \in W_p^{(1)}$, $u_n \neq u$, $u_n \to u$ в $W_p^{(1)}$. Для соответствующих собственных значений имеем $\lambda_n \to \lambda$. Обозначим $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots \ldots < x_t \leqslant 1$ нули $u(x)$ и $0 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_s \leqslant 1$ нули $u'(x)$. Из леммы 1 следует, что можно предполагать $u_n \to u$ в $C^{(1),\varkappa}$, где $0 < \varkappa < 1/(p-1)$. Из леммы 2 следует, что для $n \geqslant n_0$ u_n и u_n' имеют то же число нулей, что и u, u', и что эти нули $x_i^n \to x_i$, $y_i^n \to y_i$. Пусть $1 < q_1 < q_2 < 2(p-1)/(2p-3)$. Если нужно, то изменим u_n так, что $\|u_n\|_{1,q_1} = \|u\|_{1,q_1}$. При этом все сказанное остается в силе. Теперь

$$\int_0^1 (dT(u + t(u_n - u))(u_n - u), v)\,dt -$$

$$-\lambda \int_0^1 (dS(u + t(u_n - u))(u_n - u), v)\,dt = (\lambda_n - \lambda)(Su_n, v). \tag{13}$$

Из леммы 1 и 5 следует

$$\frac{|\lambda_n - \lambda|}{\|u_n - u\|_{1,q_1}} \leqslant c\|u_n - u\|_{1,q_1}^{q_1-1}. \tag{14}$$

Положим в (13) $v = u_n - u$ и разделим (13) на $\|u_n - u\|_{1,q_1}^2$. Теперь из леммы 1, 2, 3 и неравенства $|u' + t(u_n' - u')|^{p-2} \geqslant \min(|u'|^{p-2}, |u_n'|^{p-2})$ следует, имея в виду (14) и полагая $h_n = (u_n - u)/\|u_n - u\|_{1,q_1}$,

$$\|h_n\|_{1,q_2} \leqslant c. \tag{15}$$

Мы можем предполагать, что $h_n \rightharpoonup h$ (слабая сходимость) в $W_{q_2}^{(1)}$. Пусть

$$Q(x) \equiv a(x)\left(\int_0^1 |u'(x) + t(u_n'(x) - u'(x)|^{p-2}dt\right) h_n'(x) +$$

$$+ \int_0^x \left(\int_0^1 |u(\xi) + t(u_n(\xi) - u(\xi))|^{p-2}dt\right)(\lambda e(\xi) - b(\xi))\,h_n(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{\lambda_n - \lambda}{\|u_n - u\|_{1,q_1}} \int_0^x c(\xi)\,|u_n(\xi)|^{p-2} u_n(\xi)\,d\xi.$$

Но опять $Q(x) = \int_0^1 Q'(\xi)\,d\xi$ почти всюду, из чего следует, что функция

$$\left(\int_0^1 |u'(x) + t(u_n'(x) - u'(x))|^{p-2}dt\right) h_n'(x)$$

удовлетворяет условию Липшица с постоянной, не зависимой от n. Из этого следует, имея в виду лемму 1, что можно предполагать $h_n'(x) \to h'(x)$ всюду помимо точек $y_1, \ldots, y_s$. Из теоремы Витали и из (15) следует, что $h_n \to h$ в $W_{q_1}^{(1)}$, значит $\|h\|_{1,q_1} = 1$. Из леммы Фату теперь получим, рассуждая, как и при доказательстве (15), что $h \in W_{2,\varphi}^{(1)}$, и из леммы 3 и (14), что для $\mu = \lambda$ h является решением проблемы Ш.Л. в вариациях. Видно, что u — тоже решение этой проблемы. Полагая, что $\Psi(u) \equiv \|u\|_{1,q_1}^{q_1}$, Ψ имеет непрерывный дифференциал Фреше и $0 = \Psi(u_n) - \Psi(u) = d\Psi(u)(u_n - u) + \omega(u_n - u)$, получим $d\Psi(u)h = 0$. Наоборот, $d\Psi(u)u \neq 0$ влечет за собой $u \neq h$, что противоречит лемме 4.

Математический институт
Чехословацкой Академии наук
Прага

Поступило
24 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Nečhas, Ann. Skuola norm. super Pisa. **23**, 2, 331 (1969). [2] F. Browder, Bull. Am. Math. Soc., **74**, № 4, 651 (1968). [3] С. И. Похожаев, Функц. анализ, **1**, 3, 66 (1967). [4] **M. Kuchera, Comment.** Math. Univ. Carol., **11**, 2, 337 (1970). [5] S. Fuchik, ibid., **11**, 2, 271 (1970). [6] Э. С. Цитланадзе, Тр. Московск. Матем. общ., **2**, 235 (1953).