Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.946+517.516 МАТЕМАТИКА

М. Б. КАПИЛЕВИЧ

О РАДИАЛЬНЫХ СВЯЗЯХ УРАВНЕНИЙ КЛАССА БЕССЕЛЯ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 18 V 1971)

Рассмотрим в области $\Omega[0 \leqslant x_k < \infty,\ k=1,\ldots,n]$ уравнения ([1])

$$B[w] + F_1(r)w = 0, \quad B[u] + F_2(r)u = 0, \tag{1}$$

$$B = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{a_k}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \quad n \geqslant 2, \tag{2}$$

$$F_1(r) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-1} r^{k-1}, \quad F_2(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-1} r^{k-1}. \tag{3}$$

Исследуем связи $u = T_r[w]$, $w = T_r^{-1}[u]$ их решений $w(r,\theta)$, $u(r,\theta) \in C^2(\Omega)$ в гиперсферических полярных координатах (r,θ), $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$.

1. Пусть $u(0,\theta) = w(0,\theta)$, $N = n + a_1 + \ldots + a_n \geqslant 2$, $v_r = r\partial/\partial r$. Тогда

$$u(r,\theta) = w(r,\theta) + \int_0^r \frac{1}{\rho}(\rho/r)^{(N-2)/2} H(r,\rho)\, w(\rho,\theta)\, d\rho, \tag{4}$$

$$[v_r^2 + r^2 F_2(r)]\, H = [v_\rho^2 + \rho^2 F_1(\rho)]\, H \quad (0 \leqslant \rho \leqslant r), \tag{5}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{N/2} H(r,\rho) = \lim_{\rho\to 0} \rho^{N-2} v_\rho [\rho^{1-N/2} H(r,\rho)] = 0, \tag{6}$$

$$H(r,r) = {}^1/_2 \int_0^r r\,[F_1(r) - F_2(r)]\, dr \quad (r \geqslant 0). \tag{7}$$

2. Если $H(r,\rho)$ $(r \leqslant \rho < \infty)$ — интеграл уравнения (5), для которого

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^{N/2} H(r,\rho) = \lim_{\rho\to\infty} \rho^{N-2} v_\rho [\rho^{1-N/2} H(r,\rho)] = 0, \tag{8a}$$

$$H(r,r) = {}^1/_2 \int_r^{\infty} r\,[F_1(r) - F_2(r)]\, dr \quad (r \geqslant 0), \tag{8b}$$

то при условии сопряжения $u(\infty,\theta) = w(\infty,\theta)$ находим

$$u(r,\theta) = w(r,\theta) + \int_r^{\infty} \frac{1}{\rho}(\rho/r)^{(N-2)/2} H(r,\rho)\, w(\rho,\theta)\, d\rho. \tag{9}$$

3. В сходных с (4), (9) операторах Вольтерра 1-го рода

$$u(r,\theta) = \int_0^r \frac{1}{\rho}(\rho/r)^{(N-2)/2} H(r,\rho)\, w(\rho,\theta)\, d\rho, \tag{10a}$$

$$u(r,\theta) = \int_r^{\infty} \frac{1}{\rho}(\rho/r)^{(N-2)/2} H(r,\rho)\, w(\rho,\theta)\, d\rho \tag{10b}$$

ядра $H(r,\rho)$ также обладают свойствами (5), (6), (8a), а вместо (7) и (8b) здесь надо требовать $\dfrac{d}{dr} H(r,r) = 0 \quad (r \geqslant 0)$, причем $H(r,r) = \mathrm{const}$ находится из дополнительного условия сопряжения функций u, w, u_r, w_r при $r = 0$, $r = \infty$.

4. Решение $H_1^{(2)}$ задачи (5), (6), (7) имеет вид

$$H_1^{(2)}(r,\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+1} f_m(t), \quad t=\rho/r, \quad f_0 = {}^1/_2 \sqrt{t}\,(b_{-1}-c_{-1}). \tag{11}$$

В частном случае, когда $F_1(r) \equiv 0$, получаем

$$H_0^{(2)}(r,\rho) = -v_\rho[G(r,\rho)], \quad G(r,r) = G(0,\rho) = 1, \tag{12}$$

$$[v_r^2 - v_\rho^2 + r^2 F_2(r)]\,G = 0, \quad G(r,\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m f_m(t). \tag{13}$$

Пусть $R_k^{(l)}(0) = 1$, $l=1, 2$,

$$L_{k,l}[R_k] = R_k'' + (2k+1)\,r^{-1}R_k' + F_l(r)\,R_k = 0, \tag{14}$$

$$R_k^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{(k)} r^n, \quad n(2k+n)\,\mu_n^{(k)} = -\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i^{(k)} c_{n-i-2}. \tag{15}$$

Тогда, исходя из (12), (13) и (15), находим

$$f_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \beta_m^{(n)} t^{m/2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu_n^{(k)} t^{-k}\,\frac{dk}{k} \quad (c = \text{const}), \tag{16}$$

$\beta_m^{(n)} = \lim\limits_{2k\to(-m)} [(1+m/(2k))\,\mu_n^{(k)}]$. Когда $F_2(r) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2k} r^{2k}$, получаем $[\alpha_n = \beta_n^{(n)},\ \alpha_0 = 1]$,

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m}(r\rho)^m R_m^{(2)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(r)\,(r-\rho)^m, \quad A_0(r) \equiv 1, \tag{17}$$

$$2(m+1)\,A_{m+1} = mA_m r^{-1} - A_m' - r^{-(m+1)}\int_0^r r^{m+1} F_2(r)\,A_m(r)\,dr.$$

5. Решением уравнения Вольтерра (4) служит оператор

$$w(r,\theta) = u(r,\theta) - \int_0^r \frac{1}{\rho}\,(\rho/r)^{(N-2)/2} H(\rho,r)\,u(\rho,\theta)\,d\rho. \tag{18}$$

Ядра, переводящие $F_1(r) \not\equiv 0$ в $F_2(r)$, можно построить, если найти функции $H_0^{(k)}$, преобразующие $F_1(r) \equiv 0$ в $F_k(r)$, так как

$$H_1^{(2)}(r,\rho) = H_0^{(2)}(r,\rho) - H_0^{(1)}(\rho,r) - \int_\rho^r \frac{1}{\xi} H_0^{(2)}(r,\xi)\,H_0^{(1)}(\rho,\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

При четных $F_k(r)$ (17) и (19) дают разложение

$$H_1^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\,[\alpha_{2m+2}^{(1)} - \alpha_{2m+2}^{(2)}]\,(r\rho)^{m+1}\, R_{m+1}^{(1)}(\rho)\,R_{m+1}^{(2)}(r), \tag{20}$$

6. Приведем примеры применения алгорифмов (11)—(20). Пусть

$$F_2(r) = 4\gamma(\gamma+1)\,(r^2+1)^{-2} - 4\delta(\delta+1)\,(r^2-1)^{-2}. \tag{21}$$

Здесь (14) решается в рядах Гойна и Аппеля (см. ([2])).

$$\begin{gathered} R_k(r) = (1+r^2)^{-\gamma}(1-r^2)^{-\delta}F(-1, b, \alpha, \beta, k+1; -2\gamma; r^2) = \\ = F_3(-\gamma, -\delta, \gamma+1, \delta+1, k+1; X_1, Y_1), \\ \lambda = \gamma+\delta, \quad \mu = \delta-\gamma, \quad \alpha - k = \beta = -\lambda, \quad b = \mu(\lambda-k), \\ (r^2+1)X_1 = (r^2-1)Y_1 = r^2, \end{gathered} \tag{22}$$

а из (12)—(17) следует

$$(m!)^2\Delta_m = (-\delta)_m(1+\delta)_m,$$

$$A_m = \Delta_m(Y_1/r)^m{}_3F_2(-m, -\gamma, 1+\gamma, 1+\delta-m, -\delta-m; -X_1/Y_1),$$

$$(m!)^2\alpha_{2m}\Gamma(\lambda_0 - m/2)\Gamma(\mu_0 - m/2) = (-4)^m\Gamma(\lambda_0 + m/2)\Gamma(\mu_0 + m/2),$$

$$G = F_3(-\gamma, -\delta, \gamma+1, \delta+1, 1; X, Y), \quad \lambda_0 = 1+\lambda/2, \quad 2\mu_0 = \mu+1, \quad (23)$$

где $(r^2+1)X = (r^2-1)Y = r(r-\rho)$. При $\gamma=0$, $\delta=0$, $\gamma=\delta$ (22) и (23) сводятся к функциям Гаусса ${}_2F_1$, а

$$A_m = \Delta_m(Y_1/r)^m, \quad f_{2n} = \Delta_1(t-1){}_3F_2(1-n, 1-\delta, 2+\delta, 2, 2; 1-t). \quad (24)$$

В случае $F_2(r) = b\lambda r^{-1} - b^2$ $(b, \lambda = \mathrm{const})$ получаем

$$(2br)^{k+1/2}R_k = M_{\lambda_1, k}(2br), \quad (n!)^2\alpha_n = (-2b)^n[{}^1/_2(1-n) - \lambda_1]_n, \quad (25a)$$

$$G(r,\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \xi^{-\lambda_1 - 1/2}(1-\xi)^{\lambda_1 - 1/2}\exp[br(2\xi-1)]\,Q(\xi)\,d\xi, \quad (25b)$$

$$Q(\xi) = \cos[\pi\lambda_1 - 2b\sqrt{r\rho\xi(1-\xi)}], \quad 2\lambda_1 = \lambda, \quad -1 < \lambda < 1.$$

В частности, когда $\lambda = 0$, $F_2 = b^2$, (24) и (25) дают ([3], [4])

$$R_k(r) = \bar{J}_k(br), \quad (m!)^2\alpha_{2m} = (b/2)^{2m}, \quad A_m = (-1)^m\alpha_{2m}r^m,$$

$$f_{2n}(t) = \alpha_{2n}(t-1)^n, \quad G = J_0[b\sqrt{r(r-\rho)}]. \quad (26)$$

С помощью (19), (20) и найденных α_m, R_m можно перейти в (4) от каждой из рассмотренных $F_k(r)$ к любой другой из них. Например, при

$$F_1(r) = -4b(\lambda + br^2), \quad F_2(r) = 4b(\lambda - br^2) \quad (b, \lambda = \mathrm{const}) \quad (27)$$

приходим к билинейному ряду (20) для функции Куммера:

$$H_1^{(2)} = -2b\lambda r\rho\exp(-bR^2){}_1F_1(1-\lambda_1, 2; 2bR^2), \quad R^2 = r^2 - \rho^2. \quad (28)$$

Соответствующие резольвенты $H(\rho, r)$ обратных операторов (18) возникают из (23), (25b), (26), (28) при замене r на ρ. Аналогичные алгорифмы применяются и для построения ядер G, H связей (9), (10). Например, для (10a), (27), а также в сходном случае

$$F_1(r) = -b(\lambda r^{-1} + b), \quad F_2(r) = b(\lambda r^{-1} - b) \quad (b, \lambda = \mathrm{const}) \quad (29)$$

приходим к семейству ядер с параметром $\mu = \mathrm{const}$ $(S = r - \rho)$:

$$H_1^{(2)} = (R^2/(r\rho))^\mu\exp(-bR^2){}_1F_1({}^1/_2 - \lambda_1 + \mu; 1+2\mu; 2bR^2), \quad (30)$$

$$H_1^{(2)} = (S^2/(r\rho))^\mu\exp(-bS){}_1F_1({}^1/_2 - \lambda_1 + \mu; 1+2\mu; 2bS). \quad (31)$$

Сходные с (4), (9), (10) операторы получаются для уравнений

$$(B - b^2)^m u = 0, \quad (B^m + b^{2m})u = 0, \quad B^m = B[B^{m-1}], \quad m = 1, 2, \ldots \quad (32)$$

7. С помощью найденных связей строится фундаментальное решение $U_n{}^m(x, \xi)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ уравнения $(B - b^2)^m u = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ в форме радиального ряда

$$U_n^m(x, \xi) = \rho^{-2\mu}\sum_{s=0}^{\infty}(r/\rho)^{2s}\Lambda_s(r,\rho)\,Y_s(\varphi, \psi) \quad (r < \rho), \quad (33)$$

$$\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}, \quad \Lambda_s = \bar{I}_{\mu+2s}(br)\,\bar{K}_{\mu+2s}(b\rho), \quad 2\mu = N - 2m,$$

$$Y_s = \delta_s F_c(-s, \mu+s; \nu_1, \ldots, \nu_n; \varphi_1^2\psi_1^2, \ldots, \varphi_n^2\psi_n^2), \quad \varphi_i = x_i/r, \psi_i = \xi_i/\rho,$$

$$\Gamma(m)\,s!\,\delta_s\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\nu_i) = (-1)^{m+s}2^{n-2m}\Gamma(\mu+s), \quad \nu_i = \beta_i + \frac{1}{2}, \quad a_i = 2\beta_i.$$

Здесь F_c — функции Лауричелла, вырождающиеся при $n = 2$ в произведения полиномов Якоби $(a_1 \neq a_2 \neq 0)$ и Гегенбауэра $(a_1 \neq 0, a_2 = 0)$. В случаях (1), (21), (27), (29) решения $U_n{}^1(x, \xi)$ возникают, если в (33) оставить неизменными угловые множители $Y_s(\varphi, \psi)$, не зависящие от b, а радиальные множители $R_k(r) = \bar{I}_k(br)$, $\bar{R}_k(\rho) = \bar{K}_k(b\rho)$ $(k = \mu + 2s)$ заменить подходящими интегралами $R_k(r)$, $\bar{R}_k(r)$ уравнения (14), которые подобно (22), (25а) выражаются в рядах Гойна (Аппеля) и функциях Уиттекера первого и второго рода. С помощью (4), (9) (10), (33) сводятся к интегральным уравнениям и эффективно решается ряд краевых задач для (1), (32) в замкнутых и открытых областях, а также исследуются спектральные свойства оператора B в таких областях. Рассмотрим, например, в гипероктанте Ω области $D_1\{0 \leqslant r \leqslant R\}$, $D_2\{R \leqslant r < \infty\}$, $D_3\{R \leqslant r \leqslant R_1\}$ $(D_1 + D_2 = \Omega)$, ограниченные частями $S_R\{r = R, x_k \geqslant 0\}$, $S_{R_1}\{r = R_1, x_k \geqslant 0\}$ гиперсфер $r = R$, $r = R_1$ и плоскостями $x_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Обозначим через $Q_s^{(i)}(r, \rho)$ $(i = 1, 2, 3)$ функции Грина оператора $L_{k,2}$ (см. (14), $k = \mu + 2s$) на интервалах $0 \leqslant r \leqslant R$, $R \leqslant r < \infty$, $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, т. е. интегралы неоднородного уравнения $L_{k,2}[Q_s^{(i)}] = -\omega_N^{-1} r^{1-N}\delta(r-\rho)$, $(k = \mu + 2s, \delta(z)$ — дельта-функция Дирака), обладающие нулевыми граничными данными при $r = R$, $r = R_1$ и $r = \infty$. Заменяя в (33) $\Lambda_s(r, \rho)$ подходящими радиальными функциями влияния $Q_s^{(i)}(r, \rho)$, получим соответствующие функции Грина первой, второй и третьей краевой проблемы в областях D_i $(i = 1, 2, 3)$ для операторов (1), (21), (27), (29). Пусть, например, $u_i(r, \theta) \in C^2(D_i)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют в D_i уравнению $B[u_i] = 0$ и граничным условиям

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_R} + (-1)^i \frac{h}{r} u_i = f(x) \in C^2(S_R),\ x \in S_R;\ \lim_{x_k \to 0} x_k^{a_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0,$$

где $h = \mathrm{const} \geqslant 0$; $k = 1, \ldots, n$, а n_R — внутренняя нормаль к S_R. Тогда, опираясь на (33) $(b = 0,\ m = 1)$ находим для $u_i(r, \theta)$ интегральные формы вида (10):

$$u_1 = -R\int_0^1 w(rt, \theta)\, t^{h-1} dt, \quad u_2 = R\int_1^\infty w(rt, \theta)\, t^{-h-1} dt,$$

$$w(r, \theta) = (R^2 - r^2) R^{-1} \int_{S_R} f(\xi) \prod_{i=1}^n \xi_i^{a_i} P(x, \xi)\, dS_R(\xi), \tag{34}$$

$$P = \delta r_1^{-N} F_A(N/2, \beta_1, \ldots, \beta_n; a_1, \ldots, a_n; -4x_1\xi_1/r_1^2, \ldots, -4x_n\xi_n/r_1^2),$$

$$\delta \prod_{i=1}^n \Gamma(\nu_i) = 2^{n-1}\Gamma(N/2), \quad r_1^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2.$$

При этом $B[w] = 0$, $w(R, \theta) = f(x)$, $\lim\limits_{x_k \to 0} x_k^{a_k} w_{x_k} = 0$. Радиальные представления вида (33) для ядра Пуассона $P(x, \xi)$ из (34) дают возможность обобщить на случай оператора B известное разложение в ряды Лапласа по сферическим гармоникам функций, заданных на гиперсфере $r = 1$ (см. ([2]), т. 2, стр. 235), а также (путем предельного перехода в подобных рядах Лапласа) построить аналог известных кратных интегральных трансформаций Неймана и Мелера.

8. Сходные с (4), (9), (10), (33) результаты получаются в других ортогональных системах координат (цилиндрических, конических, сфероидальных, параболоидальных, бисферических, тороидальных), в которых уравнения (1), (21), (27), (29), (32) допускают полное или R-разделение переменных. Здесь разложения вида (33) для $U_n{}^m(x, \xi)$ позволяют построить функции Грина и интегральные представления решений внутренних и внешних сингулярных проблем Дирихле, Неймана, Робэна в областях, ограниченных координатными поверхностями и плоскостями вырождения уравнений (1), (32).

Московский вечерний металлургический институт

Поступило 14 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Б. Капилевич, ДАН, 125, № 4, 719 (1959). [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 1, 2, 3, М., 1965—1967. [3] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948, стр. 70. [4] S. Bergman, Trans. Am. Math. Soc., 68, № 3, 461 (1950).