Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

Б. А. ПАСЫНКОВ

О РАЗМЕРНОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 V 1971)

I. Относительно поведения большой индуктивной размерности $\operatorname{Ind} X$ в классе всех нормальных пространств или даже бикомпактов (если не рассматривать ее взаимоотношений с другими размерностными инвариантами) известно мало кроме того, что 1) она монотонна по замкнутым множествам, 2) $\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$ для произвольного нормального пространства X [1] и что 3) для дискретной суммы $\bigcup X_\alpha$ нормальных пространств X_α справедливо равенство $\operatorname{Ind} \bigcup X_\alpha = \sup\limits_\alpha \operatorname{Ind} X_\alpha$ *.

Оказывается, круг положительных утверждений, касающихся большой индуктивной размерности, можно расширить следующим образом.

Теорема 1 (факторизационная). *Для непрерывного отображения f: $X \to Z$ бикомпакта X в бикомпакт Z существует такой бикомпакт Y и такие непрерывные отображения g: $X \to Y$ и h: $X \to Z$, что*

1) $f = hg$;
2) $wY \leqslant wZ$ **;
3) $\dim Y \leqslant \dim X$;
4) $\operatorname{Ind} Y \leqslant \operatorname{Ind} X$.***

Сформулированная теорема усиливает факторизационную теорему С. Мардешича из [2].

Из теоремы 1 так же, как в [3], выводится.

Теорема 2 (об универсальном бикомпакте данного веса и размерности). *Для любых целых $n \geqslant 0$ и $m \geqslant n$ и любой бесконечной мощности τ существует бикомпакт $\Pi^{nm\tau}$, веса τ и размерности $\dim \Pi^{nm\tau} = n$, $\operatorname{Ind} \Pi^{nm\tau} = m$, содержащий гомеоморфный образ любого вполне регулярного пространства X, удовлетворяющего условиям*

$$wX \leqslant \tau, \quad \dim \beta X \leqslant n, \quad \operatorname{Ind} \beta X \leqslant m.$$

В частности, $\Pi^{nm\tau}$ содержит гомеоморфный образ любого нормального пространства X веса $wX \leqslant \tau$ и размерности $\dim X \leqslant n$, $\operatorname{Ind} X \leqslant m$ ****.

Следствие 1. *В классе бикомпактов X веса $wX \leqslant \tau$ и размерности*

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = n,$$

существует универсальный (в смысле гомеоморфного вложения) бикомпакт $\Pi^{nn\tau}$. Этот бикомпакт универсален для всех нормальных пространств X веса $wX \leqslant \tau$ и размерности $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Следствие 2. *Существует бикомпакт $\Pi^{n\omega_0\tau}$ веса τ и размерности $\dim \Pi^{n\omega_0\tau} = n$, $\operatorname{Ind} \Pi^{n\omega_0\tau} = \omega_0$, содержащий гомеоморфный образ любого вполне регулярного пространства X веса $wX \leqslant \tau$ и размерности $\dim \beta X \leqslant n$, $\operatorname{Ind} \beta X < \omega_0$.*

---

* Первые два утверждения, в отличие от третьего, справедливы и для трансфинитной размерности Ind.

** wX обозначает все пространства X.

*** Размерность $\operatorname{Ind} X$ может быть и трансфинитной.

**** Эту теорему следует сравнить с теоремой 1 из [4] и теоремой 1 из [3].

С л е д с т в и е 3. *Существует бикомпакт* $\Pi^{\omega_0\omega_0\tau}$ *веса* τ *и размерности* $\operatorname{Ind}\Pi^{\omega_0\omega_0\tau} = \omega_0$, *представимый в виде счетной суммы конечномерных в смысле* Ind, *а, следовательно, и* $\dim$, *подбикомпактов* * *и содержащий гомеоморфный образ любого вполне регулярного пространства* X *веса* $wX \leqslant \tau$ *и размерности* $\dim X < \infty$, $\operatorname{Ind} X < \omega_0$.

Т е о р е м а 3 (о бикомпактном расширении данного веса и размерности). *Для произвольного вполне регулярного пространства* X *существует такое бикомпактное расширение* bX, *что*

$$wbX = wX, \quad \dim bX \leqslant \dim \beta X, \quad \operatorname{Ind} bX \leqslant \operatorname{Ind} \beta X.$$

В частности, для любого нормального пространства X *существует такое бикомпактное расширение* bX, *что*

$$wbX = wX, \quad \dim bX \leqslant \dim X, \quad \operatorname{Ind} bX \leqslant \operatorname{Ind} X^{**}.$$

Сформулированная теорема усиливает теорему Е. Скляренко ([5]). В случае метрического пространства X для трансфинитной размерности $\operatorname{Ind} X$ сформулированная теорема независимо была доказана Л. Люксембургом.

С л е д с т в и е 4. *Для нормального пространства* X, *удовлетворяющего соотношению* $\dim X = \operatorname{Ind} X = n$, *существует бикомпактное расширение* bX *веса* $wb\,X = wX$ *и размерности* $\dim bX \leqslant \operatorname{ind} bX \leqslant \operatorname{Ind} bX \leqslant n = \dim X$.

Т е о р е м а 4 (о спектральной разложимости). *Бикомпакт* X *веса* $\tau \geqslant \aleph_0$ *для любого бесконечного кардинального числа* $\theta \leqslant \tau$ *может быть представлен в виде предела обратного спектра из бикомпактов* $\{X_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где

1) $wX_\alpha \leqslant \theta$, $\alpha \in \mathfrak{A}$;
2) $\dim X_\alpha \leqslant \dim X$, $\alpha \in \mathfrak{A}$;
3) $\operatorname{Ind} X_\alpha \leqslant \operatorname{Ind} X$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ***.

Сформулированная теорема обобщает теорему С. Мардешича ([2]).

Теоремы 1 и 3 можно усилить следующим образом.

Т е о р е м а 1′. *Для непрерывного отображения* $f\colon X \to Z$ *бикомпакта* X *в бикомпакт* Z *веса* $wZ = \tau \geqslant \aleph_0$ *и для любой системы* $\{X_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *замкнутых в* X *множеств мощности* $|\mathfrak{A}| \leqslant \tau$ *существует такой бикомпакт* Y *и такие непрерывные отображения* $g\colon X \to Y$ *и* $h\colon X \to Z$, *что*

1) $f = hg$;
2) $wY \leqslant wZ$;
3) $\dim gX_\alpha \leqslant \dim X_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$;
4) $\operatorname{Ind} gX_\alpha \leqslant \operatorname{Ind} X_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ****.

Т е о р е м а 3′. *Пусть вполне регулярное пространство* X *имеет вес* $\tau \geqslant \aleph_0'$, *множества* F_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *замкнуты в* X *и* $|\mathfrak{A}| \leqslant \tau$.

Тогда существует такое бикомпактное расширение bX *пространства* X, *что*

1) $wbX = wX$;
2) $\dim [F_\alpha]_{bX} \leqslant \dim [F_\alpha]_{\beta X}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$;
3) $\operatorname{Ind} [F_\alpha]_{bX} \leqslant \operatorname{Ind} [F_\alpha]_{\beta X}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Если пространство X *нормально, то условия* (2) *и* (3) *можно заменить на условия*

2′) $\dim [F_\alpha]_{bX} \leqslant \dim F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$;
3′) $\operatorname{Ind} [F_\alpha]_{bX} \leqslant \operatorname{Ind} F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Теоремы 1′ и 3′ усиливают соответствующие утверждения А. Зарелуа ([6]).

---

* Т. е. $\Pi^{\omega_0\omega_0\tau}$ слабо счетномерен.

** Размерность $\operatorname{Ind} \beta X$ (соответственно $\operatorname{Ind} X$) может быть трансфинитной.

*** Размерность $\operatorname{Ind} X$ может быть трансфинитной, размерность $\dim X$ может быть бесконечной.

**** Размерность $\operatorname{Ind} X_\alpha$ может быть и трансфинитной.

Следствие 5. *Для любого кардинального числа* $\tau \geqslant \aleph_0$ *существует пространство* $\Pi^{\aleph_0\tau}$, *разложимое в сумму бикомпактов* Π_i *размерности* $\operatorname{Ind}\Pi_i \leqslant i$ $i = 1, 2, \ldots,$ *и универсальное для всех нормальных пространств* X *веса* $\leqslant \tau$, *разложимых в сумму замкнутых подмножеств* X_i *размерности* $\operatorname{Ind} X_i \leqslant i, i = 1, 2, 3, \ldots$

II. Перейдем к S-слабо бесконечномерным пространствам. Напомним, что нормальное пространство X является S-слабо бесконечномерным (Ю. М. Смирнов), если для любой счетной системы дизъюнктных пар (A_i^1, A_i^2), $i = 1, 2, \ldots,$ замкнутых в X множеств существует такая система перегородок F_i между A_i^1 и A_i^2, что $\bigcap\limits_{i=1}^{s} F_i = \Lambda$ (s зависит от системы пар).

Лемма. *Если нормальное пространство* X *является* S-*слабо бесконечномерным, то и* S-*слабо бесконечномерно и его максимальное бикомпактное расширение* βX.

Теорема 5 (факторизационная теорема для S-слабо бесконечномерных бикомпактов). *Для любого непрерывного отображения* $f\colon X \to Z$ S-*слабо бесконечномерного бикомпакта* X *в бикомпакт* Z *существует такой бикомпакт* Y *и такие непрерывные отображения* $g\colon X \to Y$ *и* $h\colon Y \to Z$, *что*

1) $f = hg$;
2) $wY \leqslant wZ$;
3) *бикомпакт* Y *является* S-*слабо бесконечномерным.*

Теорема 6 (о слабо бесконечномерном бикомпактном расширении данного веса). *Для любого нормального* S-*слабо бесконечномерного пространства* X *существует* S-*слабо бесконечномерное бикомпактное расширение* bX *веса* $wbX = wX$.

Более того, если максимальное бикомпактное расширение βX *вполне регулярного пространства* X *является* S-*слабо бесконечномерным, то существует* S-*слабо бесконечномерное бикомпактное расширение* bX *пространства* X *веса* $wbX = wX$ *.

В случае метрического пространства X теорема 6 ранее была доказана Е. Скляренко [8].

III. Перейдем к размерностному инварианту ΔX, введенному В. Пономаревым в [9].

Лемма. а) *Для паракомпакта* X *всегда* $\Delta\beta X = \Delta X$; b) *для дискретной суммы* $\bigcup X_\alpha$ *паракомпактов* X_α *всегда*

$$\Delta \bigcup X_\alpha = \sup_\alpha \Delta X_\alpha.$$

Теорема 7 (факторизационная теорема для размерности ΔX). *Для непрерывного отображения* $f\colon X \to Z$ *бикомпакта* X *в бикомпакт* Z *существует такой бикомпакт* Y *и такие непрерывные отображения* $g\colon X \to Y$ *и* $h\colon Y \to Z$, *что*

1) $f = hg$;
2) $wY \leqslant wZ$;
5) $\Delta Y \leqslant \Delta X$**.

Теорема 8. *Для любого целого* $n \geqslant 0$ *и любого кардинала* $\tau \geqslant \aleph_0$ *существует бикомпакт* $\Psi^{n\tau}$ *веса* τ *и размерности* $\Delta\Psi^{n\tau} = n$, *содержащий топологический образ любого вполне регулярного пространства* X *веса* $wX \leqslant \tau$ *и размерности* $\Delta\beta X \leqslant n$. *В частности,* $\Psi^{n\tau}$ *универсален для всех паракомпактов* X *веса* $wX \leqslant \tau$ *и размерности* $\Delta X \leqslant n$.

---

* Теоремы 5 и 6 и далее теоремы 7 и 9 можно обобщить подобно тому, как теоремы 1′ и 3′ обобщают теоремы 1 и 3.

** Можно показать при желании, что бикомпакт Y из теоремы 1 будет удовлетворять условию (5).

С л е д с т в и е 6. *В классе совершенно n-мерных паракомпактов* ([9, 7]) *веса* $\leqslant \tau$ *существует универсальный бикомпакт.*

Т е о р е м а 9. *Для любого вполне регулярного пространства* X *существует бикомпактное расширение* bX *веса* $wbX = wX$ *и размерности* $\Delta bX \leqslant \Delta \beta X$. *В частности, для паракомпакта* X *существует бикомпактное расширение* bX *веса* $wbX = wX$ *и размерности* $\Delta bX \leqslant \Delta X$.

Теорема 9 для паракомпактных X независимо доказана также В. Валиевым.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Б. Веденисов, Изв. АН СССР, сер. матем., **5**, № 2. 211 (1941). [2] S. Mardešić, Ill. Math. J., **4**, № 2, 278 (1960). [3] Б. А. Пасынков, ДАН, **154**, № 5, 1042 (1964). [4] А. В. Зарелуа, ДАН, **154**, № 5, 1015 (1964). [5] Е. Г. Скляренко, ДАН, **123**, № 1, 36 (1958). [6] А. В. Зарелуа, Сиб. матем. журн., **5**, № 3. 532 (1964). [7] П. С. Александров, В. И. Пономарев, Сиб. матем. журн., **1**, № 1, 3 (1960). [8] Е. Г. Скляренко, Изв. АН СССР, сер. матем., **23**, № 2, 197 (1959). [9] В. И. Пономарев, Матем. сборн., **60**, № 1, 89 (1963).