Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.53 : 517.947.42 *МАТЕМАТИКА*

С. П. ПОНОМАРЕВ

ПРИМЕР ГОМЕОМОРФИЗМА $ACTL^p$, НЕ ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫМ В СМЫСЛЕ БАНАХА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 24 V 1971)

Пусть f — гомеоморфизм единичного квадрата $K = [0, 1]^2$ на себя; $f \in ACTL^p(K)$, если на почти всех горизонтальных и вертикальных сечениях K отображение f абсолютно непрерывно и $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y \in L^p(K)$. Известно, что при $p = 2$ такие отображения абсолютно непрерывны в смысле Банаха (см., например, [1]). Мы построим пример гомеоморфизма квадрата K на себя, принадлежащего классу $ACTL^p(K)$ с любым $0<p<2$ и в то же время не являющегося абсолютно непрерывным в смысле Банаха. При построении используется

Лемма. *Пусть σ', σ'', σ — замкнутые квадраты с общим центром z_0 и сторонами, параллельными осям координат, причем $\sigma' \subset \sigma'' \subset \sigma$ (включения строгие) и $4 \operatorname{mes} \sigma' = \operatorname{mes} \sigma$.*

Тогда существует кусочно-гладкий гомеоморфизм h квадрата σ на себя такой, что

1°. *h тождественно на границе $\operatorname{Fr} \sigma$;*

2°. *$h(\sigma') = \sigma''$;*

3°. *h абсолютно непрерывно на любом сечении квадрата σ;*

4°. *$Dh(z) = \limsup |h(z + \Delta z) - h(z)| / |\Delta z| < 2$, если $z \in \operatorname{Int} \sigma'$, и $Dh(z) < 4$, если $z \in \sigma \setminus \operatorname{Int} \sigma'$.*

Такой гомеоморфизм можно построить, например, так:

а) $h(z) = \alpha(z - z_0) + z_0$, если $z \in \sigma'$, где α — отношение длин сторон квадратов σ'' и σ';

б) h тождественно на $\operatorname{Fr} \sigma$;

в) h линейно на каждом интервале $t \cap (\sigma \setminus \sigma')$, где t — отрезок, соединяющий точку z_0 с границей $\operatorname{Fr} \sigma$.

Построение примера. Пусть $0 < \lambda < 1$. Определим последовательность кусочно-гладких гомеоморфизмов $\{h_n\}$ квадрата K на себя и последовательность замкнутых множеств $\{F_n\}$, $F_n \subset K$, $F_n \subset \operatorname{Int} F_{n-1}$, следующим образом. Положим h_1 равным тождественному отображению и $F_1 = K$. Пусть для $1 \leqslant i \leqslant n$ уже построены гомеоморфизмы $\{h_i\}$ и множества $\{F_i\}$ (каждое из которых является объединением конечного числа непересекающихся замкнутых квадратов k_i^j), удовлетворяющие требованиям:

1) h_i отображает K на K и является тождественным на $K \setminus F_{i-1}$; $F_0 = \phi$;

2) $\operatorname{mes} F_i = 4^{1-i}$;

3) $\operatorname{mes}(h_1 \circ \cdots \circ h_i)(F_i) > \lambda$;

4) $\operatorname{diam}(h_1 \circ \cdots \circ h_i)(k_i^j) \leqslant 1 / i$ для всех $k_i^j \subset F_i$;

5) $\operatorname{mes}(h_1 \circ \cdots \circ h_i)(E)$ — абсолютно непрерывная функция на борелевских подмножествах квадрата K.

Положим $\varphi_n = h_1 \circ \cdots \circ h_n$ и построим F_{n+1} и h_{n+1}. С этой целью все квадраты k_n^m, из которых составлено F_n, разобъем на равные квадраты $\{\sigma_s\}$ столь малого диаметра, чтобы для всех s выполнялось неравенство $\operatorname{diam} \varphi_n(\sigma_s) \leqslant 1 / (n + 1)$. В каждом из σ_s возьмем вчетверо меньший по площади концентрический квадрат σ_s'. Множество F_{n+1} есть объединение всех σ_s' и, очевидно, $\operatorname{mes} F_{n+1} = 4^{-n}$. Определим гомеоморфизм h_{n+1} следующим образом: h_{n+1} тождественно в $K \setminus F_n$; в каждом σ_s отображение h_{n+1} определено как в лемме, так что h_{n+1} отображает σ_s на себя, оставляя неподвижной границу $Fr\,\sigma_s$, и растягивает квадрат σ_s' в некоторый квадрат $\sigma_s'' \subset \sigma_s$. При этом, в силу 5), квадраты σ_s'' можно подобрать столь близкими к σ_s, чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{mes} \varphi_{n+1}(F_{n+1}) > \lambda$. Из построения также следует, что для φ_{n+1} выполняется (5).

Положим $k_{n+1}^s = \sigma_s'$. Поскольку $h_{n+1}(k_{n+1}^s) \subset \sigma_s$ и $\operatorname{diam} \varphi_n(\sigma_s) \leqslant \frac{1}{n+1}$ то $\operatorname{diam} \varphi_{n+1}(k_{n+1}^s) \leqslant \frac{1}{n+1}$, так что (4) выполнено.

Таким образом, $\{F_n\}$ и $\{h_n\}$ определены по индукции. Положим теперь $\varphi = \lim \varphi_n$, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Указанный предел существует всюду в K, так как если $z \notin F^{n=1}$, то z находится вне некоторого F_m и тогда из 1) следует, что $\varphi(z) = \varphi_m(z)$, а если $z \in F$, то, в силу 4), $\varphi(z)$ является элементом одноточечного множества $\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n(k_n^{m(n)})$, где $\{k_n^{m(n)}\}$ — последовательность квадратов, стягивающихся к точке z. Подобные же стандартные рассуждения, использующие 1) и 4), показывают, что φ является гомеоморфизмом квадрата K на себя. Из построения следует, что $\operatorname{mes} F = 0$, и, кроме того, проекции F_x, F_y множества F на оси координат также имеют меру нуль. Пусть $\xi \notin F_x$ и t_ξ — вертикальный отрезок (сечение), соединяющий стороны квадрата K. Так как $t_\xi \cap F = \phi$, то $t_\xi \subset K \setminus F_m$ для некоторого m. Заметим далее, что каждый гомеоморфизм h_n абсолютно непрерывен на любом сечении квадрата K, так как он «склеен» из гомеоморфизмов, рассмотренных в лемме, и тождественного гомеоморфизма. Следовательно, φ абсолютно непрерывно на t_ξ, так как φ совпадает с φ_m на $K \setminus F_m$. Для горизонтальных сечений рассуждения аналогичны приведенному. Итак, $\varphi \in ACT(K)$. Покажем, что $\varphi \in L^p(K)$, $0 < p < 2$. Вместо частных производных удобно рассматривать растяжение $D\varphi$. Если $z \in F_{n-1} \setminus F_n$, то, в силу 4^0, имеем

$$D\varphi_n(z) \leqslant Dh_1(h_2 \circ \cdots \circ h_n(z)) \cdots Dh_{n-1}(h_n(z)) \cdot Dh_n(z) < 2^{n+1}.$$

Следовательно,

$$\iint_K (D\varphi(z))^p \, dx\, dy = \sum_{n=2}^{\infty} \iint_{F_{n-1} \setminus F_n} (D\varphi_n(z))^p \, dx\, dy \leqslant 12 \cdot 2^p \sum_{n=2}^{\infty} 2^{(p-2)n}.$$

Итак, $\varphi \in ACTL^p(K)$ для всех $0 < p < 2$. Покажем, что $\operatorname{mes} \varphi(F) \geqslant \lambda > 0$. Так как гомеоморфизмы φ и φ_n совпадают на границе каждого квадрата k_n^m, то они совпадают на k_n^m и $\varphi(F_n) = \varphi_n(F_n)$. Поэтому, в силу 3^0, $\operatorname{mes} \varphi(F) = \lim \operatorname{mes} \varphi_n(F_n) \geqslant \lambda > 0$.

Построенный пример опровергает известную гипотезу об абсолютной непрерывности в смысле Банаха гомеоморфизмов класса $ACTL^p$, а также одну гипотезу более общего плана (см., например, ([2]) и ([3])).

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступило
15 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М., 1969. [2] И. Н. Песин, ДАН, 187, № 4 (1969). [3] T. Rado, P. V. Reichelderfer, Continuous Transformations in Analysis, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955, p. 432.