Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.944;97 *МАТЕМАТИКА*

В. С. РАБИНОВИЧ

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 V 1971)

В статье построена алгебра квазиэллиптических псевдодифференциальных (п.д.) операторов на R^n и установлена эквивалентность условий квазиэллиптичности и фредгольмовости *. Эти результаты использованы для доказательства единственности задачи Коши для параболических п.д. операторов.

Результаты, полученные в работе, новы также и для дифференциальных операторов.

В последнее время появились работы ([1-5]), в которых изучались п.д. операторы без предположения о стабилизации символа на бесконечности. Из этих работ отметим работу ([1]), в которой получены близкие к изложенным здесь результаты в эллиптическом случае.

Задача Коши в полупространстве для п.д. операторов со стабилизирующимся на бесконечности символом рассматривалась в работе ([7]), где была установлена ее обратимость в весовых классах с весом $e^{-t\rho}$ для достаточно больших $\rho > \rho_0 > 0$.

В настоящей работе показано, что условие параболичности необходимо и достаточно для обратимости задачи Коши для полупространства в обычных функциональных пространствах Соболева — Слободского без веса.

1°. Будем обозначать через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точки n-мерного вещественного пространства R_x^n, а через $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — точки двойственного к R_x^n пространства R_ξ^n.

Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ — вектор с компонентами $\nu_i > 0$, тогда обозначим $|x|_\nu^2 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|^{2/\nu_i}$, если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, то $|\nu\cdot\alpha| = \sum\limits_{i=1}^n \nu_i\cdot\alpha_i$. Множество точек вида $q^\nu\cdot x = (q^{\nu_1}\cdot x_1, \ldots, q^{\nu_n}\cdot x_n)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — фиксированная точка R_x^n, назовем ν-лучом. Если Ω — открытое множество на единичной сфере $S_{n-1} \subset R^n$, то ν-конусом Γ_Ω^ν, порожденным Ω, назовем множество ν-лучей, проходящих через точки Ω.

Компактифицируем R_x^n, присоединив к каждому ν-лучу бесконечно удаленную точку. В объединении ${}^\nu\tilde{R}^n = R_x^n \cup \mathfrak{M}_x^\nu$ введем топологию, в которой фундаментальной системой окрестностей бесконечно удаленной точки $x \in \mathfrak{M}_x^\nu$ служат множества $\Gamma_\Omega^\nu \cap \mathscr{E}_R$, где $\mathscr{E}_R = \{x: \sum\limits_{i=1}^n x_i^2/R^{2\nu_i} > 1\}$, а Γ_Ω^ν — ν-конус, содержащий ν-луч, отвечающий точке $x \in \mathfrak{M}_x^\nu$. ${}^\nu\tilde{R}^n$ является отделимым бикомпактным топологическим пространством. Мера на ${}^\nu\tilde{R}^n$ переносится с R_x^n.

Отметим, что впервые топология такого типа при $\nu = (1, \ldots, 1)$ в связи с изучением уравнений свертки в конусах была использована в работе ([11]).

Определение 1. Через $H^{s,\mu}$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, $\mu_n > 0$, обозначим пространство таких распределений $u(x) \in \mathscr{D}'(R^n)$, что их преобразо-

* Если X и Y — банаховы пространства, то линейный оператор T: $X \to Y$ называется фредгольмовым, если $\ker T = T^{-1}(0)$ конечномерно, $\operatorname{coker} T = Y / T(X)$ конечномерно.

вания Фурье $\hat{u}(\xi)$ измеримы и

$$\|u\|^2_{S,\mu} = \int (1 + |\xi|^2_{\mu})^S |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \qquad (1)$$

Пространства такого типа изучены в (9).

Определение 2. Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — фиксированные векторы такие, что $\nu_i > 0$, $\mu_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. m — фиксированное вещественное число. Обозначим через $\mathscr{L}^m_{\nu,\mu}$ множество всех таких $a(x, \xi) \in C^\infty(R_x^n \times R_\xi^n)$, что:

1) для любых мультииндексов α, β, существуют константы $C_{\alpha\beta}$ такие, что

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1 + |x|_\nu)^{-|\nu\cdot\beta|}(1 + |\xi|_\mu)^{m-|\mu\cdot\alpha|}; \qquad (2)$$

2) функция $a'(x, \xi) = (1 + |\xi|_\mu)^{-m} a(x, \xi)$ непрерывна на ${}^\nu\widetilde{R}_x^n \times {}^\mu\widetilde{R}_y^n$.

Сопоставим $a(x, \xi) \in \mathscr{L}^m_{\nu,\mu}$ п. д. оператор

$$a(x, D)u = (2\pi)^{-n/2} \int a(x, \xi)\hat{u}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi, \quad u \in C_0^\infty(R^n). \qquad (3)$$

Класс операторов, отвечающих функциям из $\mathscr{L}^m_{\nu,\mu}$ обозначим через $\mathscr{B}^m_{\nu,\mu}$. Будем говорить, что оператор A имеет порядок m, если он ограничен из $H^{s,\mu}$ в $H^{s-m,\mu}$ для всех s.

Определение 3. Символом п. д. оператора $a(x, D) \in B^m_{\nu,\mu}$ назовем функцию $\tilde{a}(x, \xi)$, являющуюся сужением $a'(x, \xi)$ на бикомпакт $\mathfrak{R} = ({}^\nu\widetilde{R}_x^n \times \mathfrak{M}_\xi^\mu) \cup (\mathfrak{M}_x^\nu \times {}^\nu\widetilde{R}_\xi^n)$ — границу ${}^\nu\widetilde{R}_x^n \times {}^\mu\widetilde{R}_\xi^n$.

Отметим, что пространство $\mathfrak{R}$ гомеоморфно сфере размерности $2n - 1$.

2°. Сформулируем основные свойства операторов класса $\mathscr{B}^m_{\nu,\mu}$.

Теорема 1. *Пусть $a(x, D) \in \mathscr{B}^m_{\nu,\mu}$, тогда оператор $a(x, D)$ с пространства C_0^∞ продолжается до непрерывного оператора из $H^{s,\mu}$ в $H^{s-m,\mu}$.*

Доказательство теоремы 1 аналогично (6), стр. 330.

Теорема 2. I) *Пусть $a(x, D) \in \mathscr{B}^{m_1}_{\nu,\mu}$, $b(x, D) \in \mathscr{B}^{m_2}_{\nu,\mu}$, тогда коммутатор $[a(x, D), b(x, D)]$ вполне непрерывен из $H^{s,\mu}$ в $H^{s-m_1-m_2,\mu}$ и имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$;*

II) *если $a(x, D) \in \mathscr{B}^m_{\nu,\mu}$, то оператор A^*, формально сопряженный к $a(x, D)$, отличается от оператора $\bar{a}(x, D)$, отвечающего $\overline{a(x, \xi)}$, на вполне непрерывный из $H^{s,\mu}$ в $H^{s-m,\mu}$ оператор порядка $m - 1$;*

III) *пусть $K = \max_{\mathfrak{R}} |\tilde{a}(x, \xi)|$, тогда*

$$|||a(x, D)|||_{s,m} = \inf_T \|a(x, D) + T\|_{s,m} = K, \qquad (4)$$

где inf *берется по множеству вполне непрерывных операторов T: $H^{s,\mu} \to H^{s-m,\mu}$;*

IV) *для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C(\varepsilon)$ такая, что*

$$\|a(x, D)u\|_{s-m,\mu} \leqslant (K + \varepsilon)\|u\|_{s,\mu} + C(\varepsilon)\|u\|_{s-1,\mu}.$$

Пусть теперь $A(x, D)$ — $N \times N$-матрица $(a_{ij}(x, D))_{i,j=1}^N$ п.д. операторов $a_{ij}(x, D) \in B^m_{\nu,\mu}$. В этом случае будем говорить, что $A(x, D) \in \mathscr{B}^m_{\nu,\mu,N}$, $N \times N$-матрицу-функцию $\widetilde{A}(x, \xi) = (\tilde{a}_{ij}(x, \xi))_{ij=1}^N$ будем называть символом оператора $A(x, D)$.

Теорема 2 с очевидными изменениями переносится на случай матриц. Пространство $H^{s,\mu}$ заменим пространством $H_N^{S,\mu} = H^{s,\mu} \otimes C^N$, $\overline{a(x, \xi)}$ на эрмитово сопряженную матрицу $A^*(x, \xi)$, $K = \max_{\mathfrak{R}} |A(x, \xi)|_N$, где $|\cdot|_N$ — норма линейного гомоморфизма пространства C^N.

Будем обозначать через $C_N(\mathfrak{R})$ пространство непрерывных на $\mathfrak{R}$ $N \times N$-матриц-функций с нормой $\max_{\mathfrak{R}} |A(x, \xi)|_N$.

Определение 4. Пополнение множества операторов $\mathscr{B}^m_{\nu,\mu,N}$ по норме

$$|||A(x, D)|||_{s,m,N} = \inf_T \|A(x, D) + T\|_{s,m,N} \qquad (5)$$

где inf берется по всем вполне непрерывным операторам $T\colon H_N^{S,\mu}\to H_N^{S-m,\mu}$, обозначим через $\overline{\mathcal{B}^{m,S}_{\nu,\mu,N}}$.

Теорема 3. *Отображение σ_N, сопоставляющее оператору $A(x, D)\in\mathcal{B}^m_{\nu,\mu,N}$ его символ $\tilde{A}(x,\xi)\in C_N(\mathfrak{R})$, продолжимо до эпиморфизма $\sigma_N^{m,S}:\overline{\mathcal{B}^{m,S}_{\nu,\mu,N}}\to C_N(\mathfrak{R})$, ядром которого являются вполне непрерывные операторы.*

Следствие 1. *Фактор-алгебра $\overline{\mathcal{B}^{0,S}_{\nu,\mu,S}}/\mathcal{T}_S$, где $\mathcal{T}_S$ — двухсторонний идеал вполне непрерывных операторов в $(H^{S,\mu}\to H^{S,\mu})$ изометрична алгебре матриц-функций $C_N(\mathfrak{R})$.*

Определение 5. Символом оператора $A\in\overline{\mathcal{B}^{m,S}_{\nu,\mu,N}}$ назовем матрицу-функцию $\sigma_N^{m,S}(A)(x,\xi)\in C_N(\mathfrak{R})$, являющуюся образом оператора A при эпиморфизме $\sigma_N^{m,S}$.

Определение 6. Оператор $A\in\overline{\mathcal{B}^{m,S}_{\nu,\mu,N}}$ назовем квазиэллиптическим, если $\det\sigma_N^{m,S}(A)(x,\xi)\neq 0$ на $\mathfrak{R}$.

Теорема 4. *Оператор $A\subset\overline{\mathcal{B}^{m,S}_{\nu,\mu,N}}$ есть оператор Фредгольма из $H_N^{S,\mu}$ в $H_N^{S-m,\mu}$ тогда и только тогда, когда он квазиэллиптический.*

Приведем формулу для индекса квазиэллиптического п.д. оператора. Ограничимся случаем $n=N$ и унитарным символом $\sigma_N^{m,S}(A)(x,\xi)$, так как при $N<n$ индекс равен нулю, а при $N>n$ существует гомотопия в классе квазиэллиптических операторов к случаю $n>N$ ([10]). Пусть P_n — проекция унитарной группы матриц U_n на сферу S_{2n-1} размерности $2n-1$, сопоставляющая матрице ее нижнюю строку, тогда

$$\operatorname{ind}A=k_n\frac{\deg P_n\sigma_n^{m,S}(A)(x,\xi)}{(n-1)!},$$

где $k_n=(-1)^{n(n+1)/2-1}$, при соответствующем выборе ориентации в R^{2n} ([12]).

3°. Будем обозначать: $R_+{}^n=\{x=(x',x_n):\ x_n>0\}$, ${}^\nu\tilde{R}_+{}^n$ — замыкание $R_+{}^n$ в топологии ${}^\nu\tilde{R}^n$. Через $\mathring{H}_N^{S,\mu}(R_+^n)$ обозначим подпространство пространства $H_N^{S,\mu}$, состоящее из распределений с носителями в $\bar{R}_+{}^n$. Отметим, что функция $u\in\mathring{H}^{S,\mu}(R_+{}^n)$, где $S/\mu_n=k$ — целое положительное число, удовлетворяет граничным условиям $D^j_{x_n}u(x',0)=0$, $j=0,\ldots,k-1$.

Определение 7. Будем говорить, что п.д. оператор $A(x,D)$, отвечающий матрице $A(x,\xi)=(a_{ij}(x,\xi))_{i,j=1}^N$, принадлежит классу $\mathcal{P}^m_{\nu,\mu,N}$, если:

1) функции $a_{ij}(x,\xi',\xi_n)$ аналитически продолжимы по ξ_n в верхнюю полуплоскость $\lambda=\operatorname{Im}\xi_n\geqslant 0$, где они удовлетворяют оценкам (2) для всех ξ_n, $\operatorname{Im}\xi_n\geqslant 0$;

2) функции

$$a'_{ij}(x,\xi)=\begin{cases}(1+i\,|\,\xi'\,|_{\mu'}+\xi_n^{1/\mu_n})^{-m}\,a(x,\xi), & \mu=(\mu',\mu_n),\quad \mu_n\geqslant 1,\\ (1+i\,|\,\xi'\,|_{\mu'}^{\mu_n}+\xi_n)^{-m/\mu_n}\,a(x,\xi), & \mu=(\mu',\mu_n),\quad 0<\mu_n<1,\end{cases}\tag{6}$$

непрерывны на ${}^\nu\tilde{R}^n\times{}^\mu\tilde{R}^n$ по (x,ξ) для всех $\lambda>0$.

Сужение матрицы $A(x,\xi)$ на границу $\mathfrak{R}_+$ бикомпакта ${}^\nu\tilde{R}_+{}^n\times{}^\mu\tilde{R}^n$ будем называть символом оператора $A(x,D)\in\mathcal{P}^m_{\nu,\mu,N}$.

Отметим, что из условия 1) определения 7 следует, что п.д. оператор $A(x,D)$ продолжается до ограниченного оператора из

$$\mathring{H}_N^{S,\mu}(R^n)\ \text{в}\ \mathring{H}_N^{S-m,\mu}(R_+^n).$$

Определение 8. Будем говорить, что оператор $A(x,D)\in\mathcal{P}^m_{\nu,\mu,N}$ параболический, если $\det\tilde{A}(x,\xi',\xi_n+i\lambda)\neq 0$ $\forall(x,\xi)\in\mathfrak{R}_+$ и $\lambda\geqslant 0$.

Отметим, что такое определение параболичности согласуется с определением параболической системы по И. Г. Петровскому ([8]).

Теорема 5. *Оператор* $A(x, D)$ *есть изоморфизм пространств* $\mathring{H}_N^{S,\mu}(R_+^n)$ *и* $\mathring{H}_N^{S-m,\mu}(R_+^n)$ *тогда и только тогда, когда он параболический.*

Достаточность. Рассмотрим семейство операторов

$$A_\lambda(x, D) = e^{-\lambda x_n} A(x, D) e^{\lambda x_n} = A(x, D_{x'}, D_{x_n} + i\lambda),$$

непрерывно зависящее от параметра $\lambda \geqslant 0$. Из условия параболичности следует, что $A_\lambda(x, D)$ семейство операторов Фредгольма с индексом, не зависящим от $\lambda \geqslant 0$. Используя теорему 2, устанавливаем, что существует такое $\lambda_0 > 0$, что для всех $\lambda > \lambda_0$ операторы $A_\lambda(x, D)$ обратимы, следовательно, индекс семейства $A_\lambda(x, D)$ равен нулю.

Покажем, что $\ker A(x, D) = \{0\}$. Рассмотрим однородное уравнение

$$A(x, D)u = 0, \quad u \in \mathring{H}_N^{S,\mu}(R_+^n) \tag{7}$$

и покажем, что оно имеет только тривиальные решения. Действительно, уравнение (7) эквивалентно уравнению $A_{\lambda_1}(x, D)v = 0$, где $v = e^{-\lambda_1 x_n}$, имеющему только тривиальное решение в пространстве $\mathring{H}_N^{S,\mu}(R_+^n)$, $\lambda_1 > \lambda_0$. Но $v \in \mathring{H}_N^{S,\mu}(R_+^n)$, следовательно, $u \equiv 0$.

Необходимость. Используя соображения инвариантности относительно сдвига и квазиоднородности, устанавливаем, что условия обратимости оператора $A(x, D)$: $\mathring{H}_N^{S,\mu}(R_+^n) \to \mathring{H}_N^{S-m,\mu}(R_+^n)$ эквивалентны условиям обратимости в пространстве $L_2^N(R_+^n)$ семейства инвариантных относительно сдвига операторов $A(x, D)$, где $x \in {}^\nu\tilde{R}_x^n$. Отметим, что при $x \in {}^\nu\tilde{R}_x^n \setminus \mathfrak{M}_x^\nu$ операторы $\tilde{A}(x, D)$ квазиоднородны. Необходимое и достаточное условие обратимости операторов из семейства $\tilde{A}(x, D)$ состоит в том, что

$$\det \tilde{A}(x, \xi', \xi_n + i\lambda) \neq 0 \quad \forall\lambda \geqslant 0, \quad (x, \xi) \in \mathfrak{R}_+.$$

4°. Рассмотрим дифференциальный оператор на R^n, в котором применимы результаты предыдущих пунктов:

$$P(x, D) = \Big(\sum_{|\mu\alpha| \leqslant m} a_{ij}^\alpha(x) D_x^\alpha\Big)_{i,j=1}^N, \tag{8}$$

$\mu = (m_1, \ldots, m_n)$, где m_i, m/m_i — целые положительные числа. Функции $a_{ij}^\alpha(x)$ непрерывны на ${}^\nu\tilde{R}^n$ и удовлетворяют оценкам (2). Положим

$$P_m(x, \xi) = \Big(\sum_{|\mu\cdot\alpha| = m} a_{ij}^\alpha(x)\xi^\alpha\Big)_{i,j=1}^N, \quad \tilde{P}_\nu(x, \xi) = \Big(\sum_{|\mu\cdot\alpha| \leqslant m} \tilde{a}_{ij}^\alpha(x)\xi^\alpha\Big)_{i,j=1}^N,$$

где $\tilde{a}_{ij}^\alpha(x) = \lim\limits_{q\to\infty} a_{ij}^\alpha(q^\nu \cdot x)$. Оператор $P(x, D)$ является квазиэллиптическим, если

$$\det P_m(x, \xi) \neq 0 \text{ при } |\xi| \neq 0; \quad \det \tilde{P}_\nu(x, \xi) \neq 0 \text{ при } |x| \neq 0, \tag{9}$$

и является параболическим, если

$$\det P_m(x, \xi', \xi_n + i\lambda) \neq 0, \quad |\xi| + \lambda \neq 0; \quad \det \tilde{P}_\nu(x, \xi', \xi_n + i\lambda) \neq 0 \tag{10}$$

при $|x| \neq 0$ и всех $\xi \in R^n$, $\lambda \geqslant 0$.

Условия (9) являются необходимыми и достаточными условиями фредгольмовости оператора $P(x, D)$ из $H_N^{S,\mu}$ в $H_N^{S-m,\mu}$, а условия (10) — необходимые и достаточные условия обратимости оператора $P(x, D)$ из $H_N^{S,\mu}(R_+^n)$ в $H_N^{S-m,\mu}(R_+^n)$.

Ростовский
государственный университет

Поступило
11 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Грушин, Функциональный анализ и его приложения, 4, в. 3, 37 (1970). [2] H. Kumano-go, J. Math. Soc. Japan, 21, № 3, 414 (1969). [3] Л. А. Багиров, Вестн. Московск. унив., сер. матем. и мех., № 5, 66 (1969). [4] В. С. Рабинович, Матем. Сборн., 80 (122), 77 (1969). [5] М. А. Шубин, ДАН, 196, № 2, 316, (1971). [6] Л. Хёрмандер, В сборн. Псевдодифференциальные операторы, М., 1967, стр. 297. [7] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, ДАН, 181, № 2 (1968). [8] И. Г. Петровский, Бюлл. Московск. унив., сер. матем. и мех., № 7, 1 (1938). [9] Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, УМН, 20, в. 1 (191), 3 (1965). [10] Р. Т. Сили, Сборн. пер., Математика, 11, 2, 57 (1967). [11] И. Б. Симоненко, Матем. сборн., 74 (116), 298 (1967). [12] В. Н. Семенюта, И. Б. Симоненко, Матем. исследования, Кишинев, 4, 4, 134 (1969).