

Я. А. РОЙТБЕРГ, З. Г. ШЕФТЕЛЬ

ФОРМУЛА ГРИНА И ТЕОРЕМЫ О ГОМЕОМОРФИЗМАХ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 V 1971)

В ^(1, 2, 12) изучался вопрос о разрешимости в гладких функциях одного класса нелокальных эллиптических задач; в этих задачах «граничные условия» задаются линейными дифференциальными соотношениями, связывающими значения искомых функций и их производных в точках границы области с их значениями на некотором гладком многообразии, лежащем внутри области (вдоль этого многообразия коэффициенты уравнения могут иметь разрывы первого рода). В данной работе вводится понятие нормальных нелокальных граничных условий, выводится формула Грина, доказывается эллиптичность сопряженной относительно формулы Грина задачи и для обеих задач устанавливаются теоремы о полном наборе гомеоморфизмов. Эти теоремы утверждают, что оператор, порожденный задачей, осуществляет гомеоморфизм, грубо говоря, между пространствами обобщенных функций, «имеющих s и $s - 2m$ производных» (s — любое действительное число, $2m$ — порядок уравнения). Благодаря этому удается исследовать разрешимость обеих задач в классах обобщенных функций. Полученные результаты используются затем для локального повышения гладкости обобщенных решений, для построения и изучения свойств гладкости функции Грина, для исследования задач со степенными особенностями в правых частях.

1. Пусть G — ограниченная область в R^n , Γ — ее граница, G_1 — подобласть G с границей γ , не имеющей с Γ общих точек, $G_2 = G \setminus \bar{G}_1$. В G_r ($r = 1, 2$) заданы линейные дифференциальные выражения $L_r(x, D) = L_r\left(x, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ порядков $2m_r$ с комплексными коэффициентами. Положим $2m_2 + m_1 = l$. На γ заданы линейные дифференциальные выражения $B_{jr}(x, D)$ ($j = 1, \dots, l$; $r = 1, 2$), а на $\Gamma - l$ выражений $B_{js}(x, D)$ того же типа; $\text{ord } B_{jr} \leq 2m_r + \sigma_j$ ($\sigma_j < 0$) — целые; $j = 1, \dots, l$; $r = 1, 2, 3$; $m_3 = m_2$. Коэффициенты всех рассматриваемых выражений и поверхности Γ и γ предполагаются для простоты бесконечно гладкими. Предположим, что существует диффеоморфизм $\alpha: \Gamma \rightarrow \gamma$. Для каждой функции $u(y)$, $y \in \gamma$, положим $(Ju)(x) = u(\alpha x)$ ($x \in \Gamma$; $\alpha x = y \in \gamma$). Будет изучаться задача

$$L_1 u_1(x) = f_1(x) \quad (x \in G_1); \quad L_2 u_2(x) = f_2(x) \quad (x \in G_2); \quad (1)$$

$$B_j u \equiv J(B_{j1} u_1(y) + B_{j2} u_2(y))(x) + B_{j3} u_2(x) = \varphi_j(x) \quad (2)$$

$$(x \in \Gamma; y = \alpha x \in \gamma; j = 1, \dots, l).$$

Определение эллиптичности такой задачи дано в ^(2, 12).

2. Определение 1. Матрицу граничных выражений $B(x, D) = (B_{jr}(x, D))_{j=1, \dots, l; r=1, 2, 3}$ назовем 2μ -нормальной ($\mu = (m_1, m_2)$), если ее можно дополнить строками матрицы того же вида $C(x, D) = (C_{jr}(x, D))_{j=1, \dots, l; r=1, 2, 3}$ ($\text{ord } C_{jr} \leq 2m_r + \sigma'_j$; $\sigma'_j < 0$ — целые) до матрицы Дирихле порядка 2μ . Матрицей Дирихле порядка 2μ мы

называем такую матрицу граничных выражений $b(x, D) = (b_{jr}(x, D))_{j=1, \dots, 2l; r=1, 2, 3}$ ($x \in \gamma$ при $r=1, 2$; $x \in \Gamma$ при $r=3$), которую (возможно, после перестановки строк) можно разбить на $2M = \max \{2m_1, 2m_2\}$ блоков $b_s(x, D) = (b_{s^{ir}}(x, D))_{i=1, \dots, l; r=1, 2, 3}$, где $l_s = 3$ ($s = 1, \dots, \min \{2m_1, 2m_2\}$), $l_s = 1$ ($m_1 > m_2$, $s = 2m_2 + 1, \dots, 2m_1$), $l_s = 2$ ($m_1 < m_2$, $s = 2m_1 + 1, \dots, 2m_2$), так, что $\text{ord } b_{s^{ir}}(x, D) \leq 2m_r - s$ ($i = 1, \dots, l_s$; $r = 1, 2, 3$; $m_3 = m_2$; $s = 1, \dots, 2M$). $b_{s^{ir}}(x, D) \equiv 0$, если $2m_r - s < 0$, и при этом в каждой точке $x \in \Gamma$ для каждого s векторы $(b_{s_0^{i1}}(ax, v_\gamma), b_{s_0^{i2}}(ax, v_\gamma), b_{s_0^{i3}}(x, v_\Gamma))$ ($i = 1, \dots, l_s$) линейно независимы. Здесь $b_{s_0^{ir}}(x, D)$ — главная часть $b_{s^{ir}}(x, D)$, состоящая лишь из членов порядка $2m_r - s$ (если таких членов нет, то $b_{s_0^{ir}} \equiv 0$); v_Γ — орт нормали к Γ в точке x , v_γ — орт нормали к γ в точке ax .

Теорема 1. Пусть $B(x, D)$ — 2μ -нормальная матрица, а матрица $C(x, D)$ дополняет ее до матрицы Дирихле порядка 2μ .

Тогда существуют матрицы $B'(x, D) = (B'_{jr}(x, D))$. $C'(x, D) = (C'_{jr}(x, D))$ ($j = 1, \dots, l$; $r = 1, 2, 3$; $x \in \gamma$ при $r = 1, 2$; $x \in \Gamma$ при $r = 3$) такие, что для любых $u, v \in C^\infty(\bar{G}_1) \times C^\infty(\bar{G}_2)$ имеет место формула Грина

$$(Lu, v) + \sum_{j=1}^l \langle B_j u, C'_j v \rangle = (u, L^+ v) + \sum_{j=1}^l \langle C_j u, B'_j v \rangle. \quad (3)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярные произведения соответственно в $L_2(G_1) \times L_2(G_2)$ и $L_2(\Gamma)$; L_r^+ ($r = 1, 2$) — дифференциальные выражения, формально сопряженные к L_r ; $B_j u$ ($j = 1, \dots, l$) определяются как в (2); $C_j u$, $B'_j v$, $C'_j v$ имеют аналогичный смысл. При этом

$$\text{ord } B'_{jr} \leq -\sigma_j - 1; \quad \text{ord } C'_{jr} \leq -\sigma_j - 1 \quad (j = 1, \dots, l; r = 1, 2, 3); \quad (4)$$

если выражения L_r эллиптичны в $\bar{G}_r$ ($r = 1, 2$), то для каждого j в каждом из неравенств (4) хотя бы при одном r имеет место знак равенства.

3. Задачу

$$L_1^+ v_1(x) = g_1(x) \quad (x \in G_1); \quad L_2^+ v_2(x) = g_2(x) \quad (x \in G_2); \quad (5)$$

$$B_j v(x) = \psi_j(x) \quad (x \in \Gamma; j = 1, \dots, l) \quad (6)$$

естественно назвать сопряженной к задаче (1), (2) относительно формулы Грина (3).

Теорема 2. Пусть задача (1), (2) эллиптична, а матрица $B(x, D)$ граничных условий 2μ -нормальна.

Тогда задача (5), (6) также эллиптична.

4. Введем нужные функциональные пространства. $H^{s,p}(G_r)$ ($s \geq 0$ — целое, $1 < p < \infty$) — пространство С. Л. Соболева. В случае нецелых $s > 0$ пространство $H^{s,p}(G_r)$ определяется с помощью комплексной интерполяции (см., например, (3-5)). Если $s < 0$, то $H^{s,p}(G_r)$ — пространство, сопряженное к $H^{-s,p'}(G_r)$ ($1/p + 1/p' = 1$) относительно скалярного произведения в $L_2(G_r)$ ($r = 1, 2$). Для произвольного действительного s и мультиплекса $\mu = (m_1, m_2)$ положим $H^{s,p}(G_1, G_2) = H^{s,p}(G_1) \times H^{s,p}(G_2)$; $H^{2\mu+s}(G_1, G_2) = H^{2m_1+s,p}(G_1) \times H^{2m_2+s,p}(G_2)$. Для любого действительного s и $p \in (1, \infty)$ обозначим через $B_p^s(\Gamma)$ пространство О. В. Бесова; если $s > 0$, это пространство следов на Γ элементов из $H^{s+1/p,p}(G_2)$; пространства $B_{p,p'}^s(\Gamma)$ и $B_p^s(\Gamma)$ ($1/p + 1/p' = 1$) взаимно сопряжены относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Gamma)$ (3, 4).

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда из эллиптичности задач (1), (2) и (5), (6) вытекает конечность следующих множеств $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}^+$: $\mathfrak{K} = \{u \in H^{2\mu,p}(G_1, G_2): Lu = 0, B_j u = 0 \quad (j = 1, \dots, l)\}$, $\mathfrak{K}^+ = \{v \in H^{2\mu,p}(G_1, G_2): L^+ v = 0, B'_j v = 0 \quad (j = 1, \dots, l); M = \max \{m_1, m_2\}\}$. При этом $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}^+ \subset C^\infty(\bar{G}_1) \times C^\infty(\bar{G}_2)$.

* Если $m_1 = m_2$, то каждый блок состоит из 3 строк, т. е. $l_s = 3$ ($s = 1, \dots, 2M$).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2.

Тогда а) для того чтобы задача (1), (2) с $(f, \varphi_1, \dots, \varphi_l) \in H^{s, p}(G_1, G_2) \times$

$\prod_{j=1}^l B_p^{s-\sigma_j-1/p}(\Gamma) \equiv H^{s, p}(G, \Gamma)$ имела решение $u \in H^{2\mu+s, p}(G_1, G_2)$ ($s \geq 0$), необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, v) + \sum_{j=1}^l \langle \varphi_j, C_j v \rangle = 0 \quad (v \in \mathfrak{N}); \quad (7)$$

б) для того чтобы задача (5), (6) с $(g, \psi_1, \dots, \psi_l) \in H^{2M+s-2\mu, p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^l B_p^{2M+s+\sigma_j'+1-1/p}(\Gamma)$ имела решение $v \in H^{2M+s}(G_1, G_2)$ ($s \geq 0$), необхо-

димо и достаточно, чтобы $(u, g) + \sum_{j=1}^l \langle C_j u, \psi_j \rangle = 0$ ($u \in \mathfrak{N}$).

5. Для любого целого s обозначим через $\tilde{H}^{2\mu+s, p}(G_1, G_2)$ пополнение множества $C^\infty(\bar{G}_1) \times C^\infty(\bar{G}_2)$ по норме (ср. (6-10))

$$\|u\|_{2\mu+s, p} = \left(\|u\|_{H^{2\mu+s, p}(G_1, G_2)}^p + \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^{2m_r} \|D_v^{j-1} u_r\|_{B_p^{2m_r+s-j+1-1/p}(\Gamma)}^p + \sum_{j=1}^{2m_2} \|D_v^{j-1} u_2\|_{B_p^{2m_2+s-j+1-1/p}(\Gamma)}^p \right)^{1/p},$$

где $D_v = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial v}$ — производная по нормали к соответствующей поверхности. Если s — нецелое, то определяем $\tilde{H}^{2\mu+s, p}(G_1, G_2)$ с помощью комплексной интерполяции. Для любого действительного s замыкание $\Lambda_{s, p}$ оператора $u \rightarrow (Lu, B_1 u, \dots, B_l u)$ ($u \in C^\infty(\bar{G}_1) \times C^\infty(\bar{G}_2)$) непрерывно действует из всего $\tilde{H}^{2\mu+s, p}(G_1, G_2)$ в $H^{s, p}(G, \Gamma)$ (последнее пространство введено в теореме 3) (ср. (6-10)).

Из конечномерности $\mathfrak{N}$ следует, что каждый элемент $u \in C^\infty(\bar{G}_1) \times C^\infty(\bar{G}_2)$ можно единственным образом представить в виде $u = u' + u''$ ($(u', \mathfrak{N}) = 0$, $u'' \in \mathfrak{N}$). При этом для каждого действительного s замыкание P оператора $u \rightarrow u'$ непрерывно действует в $\tilde{H}^{2\mu+s, p}(G_1, G_2)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2.

Тогда для каждого действительного s и любого $p \in (1, \infty)$ сужение $\mathcal{L}_{s, p}$ оператора $\Lambda_{s, p}$ на $p\tilde{H}^{2\mu+s, p}(G_1, G_2)$ осуществляет гомеоморфизм $p\tilde{H}^{2\mu+s, p}(G_1, G_2) \rightarrow Q^+ H^{s, p}(G, \Gamma)$. Здесь $Q^+ H^{s, p}(G, \Gamma)$ — подпространство элементов $(f, \varphi_1, \dots, \varphi_l) \in H^{s, p}(G, \Gamma)$, удовлетворяющих условию (7).

Элемент $u \in \tilde{H}^{2\mu+s, p}(G_1, G_2)$ (s — любое действительное), для которого $\Lambda_{s, p} u = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_l) \in H^{s, p}(G, \Gamma)$, назовем обобщенным (сильным) решением задачи (1), (2). При $s \geq 0$ обобщенное решение является обычным решением этой задачи. Из теоремы 4 и формулы Грина (3) следует

Теорема 5. Для существования обобщенного решения задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы элемент $F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_l)$ удовлетворял условию (7). При этом формула $u = \mathcal{L}_{s, p}^{-1} F + \omega$ ($\omega \in \mathfrak{N}$) дает общий вид обобщенного решения этой задачи.

Утверждения, аналогичные теоремам 4, 5, справедливы и для сопряженной задачи (5), (6).

6. Пусть теперь $L(x, D)$ — линейное дифференциальное выражение порядка $2m$ с гладкими коэффициентами, определенное в области G . Рассмотрим задачу типа А. В. Бицадзе — А. А. Самарского (ср. (1, 2, 12))

$$Lu(x) = f(x) \quad (x \in G); \quad J(B_{j1} u(y))(x) + B_{j2} u(x) = \varphi_j(x)$$

$$(x \in \Gamma; y = ax \in \gamma; j = 1, \dots, m). \quad (8)$$

Добавив на γ $2m$ условий непрерывности $D^{j-1} u_1(y) = D^{j-1} u_2(y)$ ($y \in \gamma; j = 1, \dots, 2m$), мы сведем эту задачу к задаче типа (1), (2); если последняя эллиптична, то и задачу (8) будем называть эллиптической. Ясно, что для эллиптической задачи (8) с 2μ -нормальными граничными условиями справедливы с понятными изменениями утверждения теорем 3, 4, 5.

7. Теорема 4 позволяет исследовать вопрос о локальном повышении гладкости обобщенных решений вплоть до γ и Γ (ср. ⁽⁸⁾, стр. 270). Пусть γ_0 — кусок поверхности γ ; $G_0 = \alpha^{-1}\gamma_0$; G_0 — подобласть G , примыкающая к G_0 и такая, что $G_0 \cap \gamma = \gamma_0$; $u \in \tilde{H}^{2\mu+s, p}(G_1, G_2)$ — обобщенное решение задачи (1), (2) с $F \in H^{s, p}(G, \Gamma)$. Если в действительности элемент F локально в $G_0 \cup \Gamma_0$ входит в $H^{s_1, p_1}(G_0, \Gamma_0)$ ($s_1 \geq s, p_1 \geq p$), то и решение u локально в $G_0 \cup \Gamma_0$ входит в $\tilde{H}^{2\mu+s_1, p_1}(G_0 \cap G_1, G_0 \cap G_2)$. Последнее означает, что $\xi u \in \tilde{H}^{2\mu+s_1, p_1}(G_1, G_2)$ для любой $\xi(x) \in C^\infty(\bar{G})$, аннулирующей в некоторой окрестности в $\bar{G}$ множества $G \setminus \bar{G}_0$ и такой, что $\xi(x) = \xi(ax)$ для всех $x \in G_0$.

8. Теорема 4 дает возможность использовать методику работы ⁽⁹⁾ для доказательства существования вектор-функции Грина задачи (1), (2): существуют бесконечно гладкие при $x \neq y$ функции $R_0(x, y)$ ($x, y \in \bar{G}$), $R_j(x, y)$ ($x \in \bar{G}, y \in \Gamma, j = 1, \dots, l$) такие, что для каждой $(f, \varphi_1, \dots, \varphi_l) \in Q^+ H^{s, p}(G, \Gamma)$ с достаточно большим s функции $u(x) = (f, R_0(x, \cdot)) + \sum_{j=1}^l \langle \varphi_j, R_j(x, \cdot) \rangle$ является решением задачи (1), (2). Эта же методика

позволяет исследовать свойства гладкости полученной вектор-функции по совокупности переменных и оценить порядок ее особенностей при $x = y$.

9. Результаты п. 5 могут, как и в ⁽¹¹⁾, быть использованы для исследования эллиптических задач вида (1), (2) в случае, когда правые части имеют в конечном числе точек произвольные степенные особенности.

Авторы выражают глубокую признательность Ю. М. Березанскому за обсуждение полученных результатов.

Черниговский государственный педагогический институт
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
9 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, ДАН, 185, № 4 (1969). ² Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, ДАН, 192, № 3 (1970). ³ Э. Мадженес, УМН, 21, № 2 (1966). ⁴ M. Schechter, Am. J. Math., 85, № 1, 1 (1963); Math. Scand., 13, № 1, 47 (1963). ⁵ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, УМН, 21, № 2 (1966). ⁶ Я. А. Ройтберг, ДАН, 157, № 4 (1964). ⁷ Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 17, № 5 (1965). ⁸ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. ⁹ Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 19, № 5 (1967). ¹⁰ Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Матем. сборн., 78, № 3 (1969). ¹¹ Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 20, № 3 (1968). ¹² Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Сиб. матем. журн., 13, № 1 (1972).