Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.5 *МАТЕМАТИКА*

П. Е. СОБОЛЕВСКИЙ

О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 20 V 1971)

В работе исследованы разностные аналоги задачи Коши

$$v'(t)+Av(t)=f(t)\quad (0\leqslant t\leqslant 1),\quad v(0)=v_0, \tag{1}$$

и первой краевой задачи

$$v''(t)\mp Av(t)=f(t)\quad (0\leqslant t\leqslant 1),\quad v(0)=v_0,\ \ v(1)=v_1, \tag{2}$$

для дифференциальных уравнений с неограниченным оператором A в банаховом пространстве E. Предполагается, что $D(A)$ плотна в E и что множество регулярных точек A не пусто, например, A^{-1} ограничен. Получены неравенства коэрцитивности (н.к.) в разностных гёльдеровых нормах с весом. Изучение уравнений в произвольном банаховом (а не только гильбертовом (см. ([1]))) пространстве позволяет в качестве приложений получить н.к. в гёльдеровых нормах для разностных эллиптических и параболических уравнений второго порядка с любым числом независимых переменных. Для таких уравнений н.к. известны лишь в L_2-нормах ([2–5]). Н.к. означают устойчивость разностных методов в сильных нормах (в нормах со старшими разностными отношениями) и позволяют поэтому дать точную оценку скорости сходимости в этих нормах приближенных решений задач (1) и (2) к точным через норму аппроксимации.

1. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$[v_{i+1}-v_i]\cdot\Delta t^{-1}+Av_{i+1}=f_i\quad (i=0,1,\ldots,m-1;\ \Delta t=m^{-1}),$$
$$v_0 \text{ задано.} \tag{3}$$

Каждому вектору $\{f_i\}$, $f_i\in E$, сопоставим норму

$$\|\{f_i\}\|_{C_0^\alpha(\Delta t)}=\sup_i\|f_i\|_E+\sup_{i<j}\|f_j-f_i\|_E\cdot|j-i|^{-\alpha}i^\alpha\quad (0<\alpha<1). \tag{4}$$

Задача (3) коэрцитивно разрешима (к.р.) в $C_0^\alpha(\Delta t)$, если для любых $\Delta t=m^{-1}$, $f_i\in E$ и $v_0\in D(A)$ она имеет единственное решение $\{v_i\}$ и справедливо н.к.

$$\|\{[v_{i+1}-v_i]\cdot\Delta t^{-1}\}\|_{C_0^\alpha(\Delta t)}+\|\{Av_i\}\|_{C_0^\alpha(\Delta t)}\leqslant K_\alpha(\|\{f_i\}\|_{C_0^\alpha(\Delta t)}+\|Av_0\|_E). \tag{5}$$

Теорема 1. *Для того чтобы задача* (3) *была к.р. в* $C_0^\alpha(\Delta t)$, *необходимо и достаточно, чтобы A был сильно позитивным.*

Оператор A сильно позитивен, если

$$\|(\lambda I+A)^{-1}\|_E\leqslant R(A)(1+|\lambda|)^{-1}\quad (\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0). \tag{6}$$

Это означает, что $-A$ — производящий оператор сильно непрерывной при $t\geqslant 0$ полугруппы $\exp\{-tA\}$, для которой справедлива оценка

$$\|A\exp\{-tA\}\|_E\leqslant M(A)\exp\{-\delta t\}t^{-1}\quad (t>0,\ \delta>0), \tag{7}$$

т. е. $\exp\{-tA\}$ — аналитическая внутри некоторого сектора и сильно непрерывная на замыкании этого сектора полугруппа с экспоненциально убывающей нормой. Доказательство достаточности условия теоремы 1 опирается на оценки

$$\|(\lambda I+A)^{-m}\|_E \leqslant N(A)(\lambda+\delta)^{-m},$$

$$\|A(\lambda I+A)^{-m-1}\|_E \leqslant M(A)(\lambda+\delta)^{-m}m^{-1} \quad (\lambda\geqslant 0, m=1,\ldots). \quad (8)$$

Теорема 2. *Для того чтобы A был сильно позитивен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись оценки* (8).

Доказательство достаточности использует теорему 6.3.6 из [6]. Если $\exp\{-tA\}$ сильно непрерывна при $t=+0$ лишь на $D(A)$, то A $*$-сильно позитивен.

Теорема 3. *Для того чтобы A был $*$-сильно позитивным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась вторая из оценок* (8).

Доказательство достаточности проводится методом из [7]. Предельным переходом в (3) при $\Delta t\to+0$ из теоремы 1 выводится результат [8] о к.р. (1).

2. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$[v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}]\cdot\Delta t^{-2}-Av_i=f_i \quad (i=1,\ldots,m-1),$$

$$v_0 \text{ и } v_1 \text{ заданы.} \quad (9)$$

Каждому вектору $\{f_i\}$, $f_i\in E$, сопоставим норму

$$\|\{f_i\}\|_{C_{01}^{\alpha}(\Delta t)}=\sup_i\|f_i\|_E+\sup_{i<j}\|f_j-f_i\|_E\,|j-i|^{-\alpha}i^{\alpha}(1-j\Delta t)^{\alpha} \quad (0<\alpha<1). \quad (10)$$

Задача (9) к.р. в $C_{01}{}^{\alpha}(\Delta t)$, если для любых Δt, $f_i\in E$ и $v_0, v_1\in D(A)$ она имеет единственное решение $\{v_i\}$ и справедливо н.к.

$$\|\{[v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}]\cdot\Delta t^{-2}\}\|_{C_{01}^{\alpha}(\Delta t)}+\|\{Av_i\}\|_{C_{01}^{\alpha}(\Delta t)}\leqslant$$
$$\leqslant K_\alpha(\|\{f_i\}\|_{C_{01}^{\alpha}(\Delta t)}+\|Av_0\|_E+\|Av_1\|_E). \quad (11)$$

Теорема 4. *Для того чтобы задача* (9) *была к.р. в* $C_{01}{}^{\alpha}(\Delta t)$, *достаточно, чтобы A был сильно позитивным.*

Приведем схему доказательства. Пусть A слабо позитивен. Это означает, что справедлива оценка (6) при $\lambda\geqslant 0$. Для таких операторов определены [9] любые степени A^α. Дифференциальный оператор (2) раскладывается на множители $(d/dt-\sqrt{A})(d/dt+\sqrt{A})$. Оператор $\sqrt{A}$ сильно позитивен [10]. Поэтому к задаче (2) можно применить (см. [11]) результаты [8] о задаче (1). Разностный оператор (9) также раскладывается на множители, но с оператором $\sqrt{B}$, а не $\sqrt{A}$, где $B=B(\Delta t)$ таков, что $B[I+\Delta t\sqrt{B}]^{-1}=A$. С помощью формулы Коши приходим к формуле

$$(\lambda I+\sqrt{B})^{-1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{4/\Delta t^2}\sqrt{\rho(4-\rho\Delta t^2)}\,[\lambda^2-\lambda\rho\Delta t+\rho]^{-1}(\rho I+A)^{-1}d\rho, \quad (12)$$

которая при $\Delta t=0$ переходит в известную формулу из [12]. Так как скалярный множитель $\geqslant 0$ в интеграле (12), то из (12) следует, что $\sqrt{B}$ слабо позитивен, если слабо позитивен A, в отличие от $\sqrt{A}$, который сильно позитивен. Справедлива аналогичная (12) формула для $(\lambda I+\sqrt{B})^{-m-1}$ $(m\geqslant 0)$, однако скалярный множитель при $m>0$ обязательно меняет знак. В случае, если A — производящий оператор полугруппы, то можно выразить $(\rho I+A)^{-1}$ через $\exp\{-tA\}$ и в преобразованном интеграле скалярный множитель (в силу свойств преобразования Лапласа) будет уже неотрицательным. Далее, воспользовавшись (7) и теоремой 2, получим, что $\sqrt{B}$ сильно позитивен, если сильно позитивен A. При этом существенно, что удалось найти вещественный (теорема 2), а не комплексный (6) критерий сильной позитивности.

Предельным переходом при $\Delta t \to +0$ в (11) получим результат из ([11]). Однако этим путем он устанавливается для сильно позитивных, а не для любых слабо позитивных операторов, как в ([11]).

3. Пусть единичный n-мерный куб Ω $(0 < x_k < 1,\ k = 1, \ldots, n)$ с границей S заполнен сеткой $\Omega(\overline{\Delta x})$ с границей $S(\overline{\Delta x})$. Здесь $\overline{\Delta x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ — вектор шагов по осям координат. Рассмотрим разностную эллиптическую задачу

$$\begin{gathered} -A(\overline{\Delta x})\, v \equiv a_1 \Delta^2_{x_1} v / \Delta x_1^2 + \ldots + a_n \Delta^2_{x_n} / \Delta x_n^2 = f(x) \quad (x \in \Omega(\overline{\Delta x})), \\ v(x) = 0 \quad (x \in S(\overline{\Delta x})), \end{gathered} \tag{13}$$

с постоянными коэффициентами $a_i > 0$. Определим норму

$$\begin{gathered} \| f(x) \|_{C^{\bar\alpha}_{01}(\overline{\Delta x})} = \sup_{x \in \Omega(\overline{\Delta x})} |f(x)| + \\ + \sup |\Delta^k_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}} f(x)| \cdot \prod_{r=1}^{k} \Delta y_{i_r}^{-\alpha_{i_r}} \cdot x_{i_r}^{\alpha_{i_r}} \cdot (1 - x_{i_r} - \Delta y_{i_r})^{\alpha_{i_r}}; \\ x \in \Omega(\overline{\Delta x}), \quad 0 < x_{i_r} < x_{i_r} + \Delta y_{i_r} < 1; \quad \Delta y_{i_r} = m \Delta x_{i_r}, \\ 1 \leqslant k \leqslant n, \quad m = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь $\bar\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_i < 1$; $\Delta^k_{x_{i_s} \ldots x_{i_k}} f(x)$ — смешанная разность k переменных. С помощью теоремы 4 устанавливается

Теорема 5. *Справедливо н.к.*

$$\max_i \| \Delta^2_{x_i} v / \Delta x_i^2 \|_{C^{\bar\alpha}_{01}(\overline{\Delta x})} \leqslant K_{\bar\alpha} \cdot \| f \|_{C^{\bar\alpha}_{01}(\overline{\Delta x})}. \tag{15}$$

Если $a_i = a_i(x)$ и $\|a_i\| \bar{C}^\alpha(\overline{\Delta x}) < \infty$, где последняя норма отличается от (14) отсутствием весовых множителей $x_{i_r}^{\alpha_{i_r}} (1 - x_{i_r} - \Delta y_{i_r})^{\alpha_{i_r}}$, то н.к. (15) также справедливо. Это устанавливается с помощью разложения единицы. Наконец, в случае неоднородных граничных условий, разности которых до второго порядка согласованы, справедливо аналогичное (15) н.к., где в правой части дополнительно присутствуют гёльдеровы нормы вторых разностей граничных значений.

Рассмотрим разностную параболическую задачу

$$\begin{gathered} [v(t + \Delta t, x) - v(t, x)] \cdot \Delta t^{-1} + A(\overline{\Delta x})\, v(t + \Delta t, x) = f(t, x) \\ (x \in \Omega(\overline{\Delta x}),\ t = i\Delta t,\ i = 0, 1, \ldots, m - 1), \\ v(t, x) = 0 \quad (x \in S(\overline{\Delta x}),\ i = 0, 1, \ldots, m - 1), \end{gathered} \tag{16}$$

при заданном $v(0, x)$. Введем норму

$$\begin{gathered} \| f(t, x) \|_{C^{\beta\bar\alpha}_{001}(\Delta t, \overline{\Delta x})} = \sup_{0 < t < 1} \| f(t, x) \|_{C^{\bar\alpha}_{01}(\overline{\Delta x})} + \\ + \sup_{0 < t < t + \Delta\tau < 1} \| f(t + \Delta\tau, x) - f(t, x) \|_{C^{\bar\alpha}_{01}(\overline{\Delta x})} \Delta\tau^{-\beta} t^\beta; \\ 0 < \beta < 1; \quad \Delta\tau = r\Delta t, \quad r = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{17}$$

С помощью теорем 1 и 4 устанавливается

Теорема 6. *Справедливо н.к.*

$$\begin{gathered} \| [v(t + \Delta t, x) - v(t, x)] \cdot \Delta t^{-1} \|_{C^{\beta\bar\alpha}_{001}} + \max_i \| \Delta^2_{x_i} v(t, x) / \Delta x_i^2 \|_{C^{\beta\bar\alpha}_{001}} \leqslant \\ \leqslant K_{\beta\bar\alpha} (\| f(t, x) \|_{C^{\beta\bar\alpha}_{001}} + \max_i \| \Delta^2_{x_i} v(0, x) / \Delta x_i^2 \|_{C^{\bar\alpha}_{01}}). \end{gathered} \tag{18}$$

Н.к. (18) справедливо и для уравнений с переменными коэффициентами и соответствующий аналог этого неравенства — для неоднородных граничных условий.

Предельный переход в (15) и (18) при $\Delta x_i \to +0$ и $\Delta t \to +0$ приводит к новым теоремам о к.р. дифференциальных и различных дифференциально-разностных уравнений.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
28 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Лисковец, Дифференциальные уравнения, 1, № 12 (1965). [2] J. Nitsche, J. C. C. Nitsche, Arch. Rat. Mech. and Anal., 5, № 4 (1960). [3] В. Б. Андреев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 2 (1966). [4] П. Е. Соболевский, М. Ф. Тиунчик, Сборн. работ по математике, Воронеж, 1967. [5] П. Е. Соболевский, М. Ф. Тиунчик, Тр. математич. фак. Воронежск. унив. (сборн. статей по прикладным вопросам), в. 1, Воронеж, 1970. [6] Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962. [7] П. Е. Соболевский, ДАН, 196, № 3 (1971). [8] П. Е. Соболевский, ДАН, 157, № 1 (1964). [9] М. А. Красносельский, П. Е. Соболевский, ДАН, 129, № 3 (1959). [10] T. Kato, Proc. Japan Acad., 36, № 3, 94 (1960). [11] П. Е. Соболевский, Дифференциальные уравнения, 4, № 7 (1968). [12] A. V. Balakrishnan, Pacific J. Math., 10, № 2 (1960).