Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.945

МАТЕМАТИКА

В. И. ШЕВЧЕНКО

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 17 V 1971)

Голоморфным вектором называют вектор, компоненты которого удовлетворяют известной системе Моисила — Теодореску — Бицадзе [1]. Краевая задача Гильберта для голоморфного вектора впервые была поставлена А. В. Бицадзе [2] и состоит в определении кусочно-голоморфного вектора по условию сопряжения на поверхности Ляпунова S

$$U^+(y) = G(y)U^-(y) + f(y), \qquad y \in S, \tag{1}$$

с непрерывной по Гёльдеру матрицей $G(y)$. Более подробная постановка краевой задачи указана в работе [3].

В этой заметке мы проведем гомотопическую классификацию (нётеровых) задач Гильберта для голоморфного вектора. Отметим, что проблема гомотопической классификации плоских краевых задач решена В. Б. Лидским и П. А. Фроловым [4].

С помощью аналога интеграла типа Коши для голоморфного вектора [2] задача Гильберта приводится к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений [3], символический определитель $\Phi(\tau)$ которой равен *

$$\Phi(\tau) = 16\left\{\sum_{k=1}^{4} g_k^2 - \sum_{k=1}^{4}(l_k\cdot\tau)^2 - 2i\Big(\sum_{k=1}^{4} g_k l_k\Big)\cdot\tau\right\}, \tag{2}$$

где τ — единичный касательный вектор к поверхности S в точке y. Функции $g_k(y)$ выражаются через элементы матрицы $G(y)$ по формулам (13) работы [3], а векторы $4l_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ имеют соответственно компоненты

$$(g_{12} - g_{21} + g_{43} - g_{34},\ g_{13} - g_{31} + g_{42} - g_{24},\ g_{14} - g_{41} + g_{23} - g_{32}),$$
$$(-g_{11} - g_{22} + g_{33} + g_{44},\ -g_{14} - g_{41} - g_{23} - g_{32},\ g_{13} + g_{31} - g_{42} - g_{24}),$$
$$(g_{14} + g_{41} - g_{23} - g_{32},\ -g_{11} + g_{22} - g_{33} + g_{44},\ -g_{12} - g_{21} - g_{34} - g_{43}),$$
$$(-g_{13} - g_{31} - g_{24} - g_{42},\ g_{12} + g_{21} - g_{34} - g_{43},\ -g_{11} + g_{22} + g_{33} - g_{44}).$$

Ниже предполагается, что при всех τ

$$\Phi(\tau) \neq 0. \tag{3}$$

Условие (3) является достаточным для нётеровости системы сингулярных интегральных уравнений (см. [5], § 40), а, следовательно, и для нётеровости задачи Гильберта (однородная сопряженная задача введена в [3]). Две задачи вида (1) с матрицами G_0 и G_1 будем называть **гомотопными**, если существует матрица G_t, непрерывно зависящая от параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и при всех t выполнено условие (3). Предполагается, что при гомотопии сохраняется гладкость матрицы $G(y)$. В дальнейшем будем

* $\cdot$ и $\times$ означают соответственно векторное и скалярное произведение векторов.

деформировать векторы l_k и функции g_k (матрица G по ним восстанавливается однозначно).

Гомотопируя в случае необходимости нормальные составляющие векторов l_k к нулю, можно считать, что векторы l_k ($k = 1, 2, 3, 4$) в каждой точке y лежат в касательной плоскости к поверхности S в этой точке.

Пусть поле $l = \sum_{k=1}^{4} g_k l_k$ исчезает * на множестве M точек S. В силу условия (3) в некоторой окрестности M_1 этого множества форма

$$\operatorname{Re}\Phi(\tau) = 16\left\{\sum_{k=1}^{4} g_k^2 - \sum_{k=1}^{4} (l_k\cdot\tau)^2\right\} \tag{4}$$

знакоопределена. Обозначим через l^* вектор l, повернутый в касательной плоскости в положительном направлении на угол $\pi/2$. Тогда в каждой точке множества $S - M_1$ существуют непрерывные касательные поля l и l^* без особых точек. Пусть некоторый путь соединяет любые две связные компоненты множества M. Вдоль этого пути в направлении $\tau = l^*/|l^*|$ выражение (4) не может изменить знака без обращения в 0 и потому в каждой точке множества M выражение (4) имеет один и тот же знак.

Пусть на M $\operatorname{Re}\Phi(\tau) > 0$. Но тогда всюду на S

$$|g(y)|^2 = g_1^2(y) + g_2^2(y) + g_3^2(y) + g_4^2(y) > 0. \tag{5}$$

При гомотопии tl_k ($0 \leqslant t \leqslant 1$) векторов l_k ($k = 1, 2, 3, 4$) условие (3) для $0 < t \leqslant 1$ не нарушается, а при $t = 0$ оно следует из неравенства (5). Матрица G имеет теперь вид G_0 ([3]). Из тривиальности гомотопической группы $\pi_2(S^3)$ ([6]) следует существование деформации вектора (g_1, g_2, g_3, g_4) в (1, 0, 0, 0) без нарушения условия (5), вместе с которой матрица G_0 переходит в единичную. Заметим, что в этом случае решение задачи Гильберта дается интегралом типа Коши и плотностью $f(y)$ и потому задача имеет нулевой индекс ([3]).

Пусть в точках M выражение (4) отрицательно. Покажем, что тогда при всех τ

$$\sum_{k=1}^{4} (l_k\cdot\tau)^2 > 0. \tag{6}$$

Для точек M_1 это очевидно. Пусть в одной из точек множества $S - M_1$ при некотором τ $l_k\cdot\tau = 0$ ($k = 1, 2, 3, 4$). При этом значении τ выражение (4) неотрицательно. Вместе с тем $l\cdot\tau = 0$, откуда $\tau = \pm l^*/|l^*|$ и выражение (4) должно быть отрицательным. Полученное противоречие и доказывает неравенство (6).

Теперь ясно, что при гомотопии tg_k ($0 \leqslant t \leqslant 1$, $k = 1, 2, 3, 4$) условие (3) не нарушается.

Неравенство (6) означает, что ни в одной точке поверхности S не исчезают некоторые поля $l_\pm(y)$ ([7]):

$$(l_1\times l_2)\cdot n \pm (l_3\times l_4)\cdot n,\quad (l_1\times l_3)\cdot n \pm (l_4\times l_2)\cdot n,$$
$$(l_1\times l_4)\cdot n \pm (l_2\times l_3)\cdot n,$$

где n — единичный вектор внешней нормали. Пусть $\sigma_\pm$ — вращение (по терминологии М. А. Красносельского ([8])) векторного поля $l_\pm(y)$ на поверхности S. Задаче (1) при $|g| \equiv 0$ поставим в соответствие задачу типа наклонной производной для пары уравнений Лапласа с $p = l_1 + il_2$, $q = l_3 + il_4$, $r = -l_3 + il_4$, $s = l_1 - il_2$. Условием регуляризуемости этой задачи будет условие (6), а единственным гомотопическим инвариантом —

* По предположению, двумерная поверхность S гомеоморфна сфере ([3]).

ее индекс [9], который в случае двух уравнений имеет вид [7]

$$\varkappa = \sigma_+ + \sigma_-. \tag{7}$$

Поэтому единственным гомотопическим инвариантом задач (1) в рассматриваемом случае является функционал (7). Методами, развитыми в работе [10], можно проверить, что в случае, когда на M выражение (4) отрицательно, целое число (7) в точности совпадает с индексом задачи Гильберта.

Таким образом, имеется ровно две компоненты связности множества задач Гильберта с нулевым индексом, а индекс, отличный от нуля, является единственным гомотопическим инвариантом.

Автор выражает благодарность В. С. Виноградову, критические замечания которого послужили поводом для написания этой статьи.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
5 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. C. Moisil, N. Theodoresco, Mathematica, 5, 142 (1931). [2] А. В. Бицадзе, ДАН, 169, № 6, 1285 (1966). [3] В. И. Шевченко, ДАН, 169, № 6, 1285 (1966). [4] В. Б. Лидский, П. А. Фролов, ДАН, 192, № 4, 728 (1970). [5] С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962. [6] Н. Стинрод, Топология косых произведений, М., 1953. [7] В. И. Шевченко, Докл. АН УССР, № 5, 430 (1970). [8] М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956. [9] А. И. Вольперт, Матем. сборн., 59, 195 (1962). [10] В. И. Шевченко, Докл. АН УССР, № 5, 433 (1967).