Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 1

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

Н. Н. НЕПЕЙВОДА

О ВЛОЖЕНИЯХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР В АЛГЕБРУ ЛИНДЕНБАУМА — ТАРСКОГО

(Представлено академиком П. С. Новиковым 16 XI 1970)

В статье доказывается возможность вложения булевых алгебр в алгебру Линденбаума — Тарского логического (логико-математического) исчисления. Изложение ведется в рамках конструктивного направления в математике. В частности, слова последовательность и функция будут пониматься конструктивно.

Булева алгебра есть перечислимое множество M с вычислимыми операциями: бинарными $\cup$ и $\cap$, унарной $^{-}$, определенными на нем и обладающими свойствами:

1) $X \cup Y = Y \cup X,\ \ X \cap Y = Y \cap X$;
2) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z,\ X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$;
3) $(X \cap Y) \cup Y = Y,\ \ (X \cup Y) \cap Y = Y$;
4) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),\ \ (X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;
5) $(X \cap \overline{X}) \cup Y = Y,\ \ (X \cup \overline{X}) \cap Y = Y$.

Обозначим порядок в булевой алгебре через $\preccurlyeq$, булевы ноль и единицу будем обозначать 0 и 1.

Через T будет обозначаться логическое (логико-математическое) исчисление, основанное на классической или интуиционистской логике, с обычными логическими связками (может быть, и без кванторов).

Система формул T: $A_1, \ldots, A_n$ называется автономной, если при всяком замещении знаков $\mu_1, \ldots, \mu_n$ буквой $\neg$ или пустым словом Λ не имеет места $\mu_1 A_1, \ldots, \mu_{n-1} A_{n-1} \vdash_T \mu_n A_n$. Последовательность формул T: φ называется автономной, если при всяком n система $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ автономна.

Изоморфизм данной булевой алгебры M в алгебру Линденбаума — Тарского T, основанного на классической логике, есть функция из M в множество формул T, обладающая свойствами:

1) $f(0) = \neg(A \supset A),\ \ f(1) = (A \supset A)$;
2) $\vdash_T f(X \cap Y) \equiv f(X) \,\&\, f(Y),\ \ \vdash_T f(X \cup Y) \equiv \neg\neg(f(X) \vee f(Y))$;
3) $\vdash_T f(\overline{X}) \equiv \neg f(X)$;
4) Если $\vdash_T f(X) \equiv f(Y)$, то $X = Y$.

Изоморфизмом M в псевдо-алгебру Линденбаума — Тарского T, основанного на интуиционистской логике, будем называть функцию f из M в множество формул T, обладающую свойствами 1—4 и свойством

5) $\vdash_T \neg\neg f(X) \equiv f(X)$.

Теорема 1. *Если в T, основанном на классической (интуиционистской) логике, имеется автономная последовательность формул, то можно построить изоморфизм любой булевой алгебры рассматриваемого типа в алгебру (соответственно псевдо-алгебру) Линденбаума — Тарского T.*

Теорема 2. *Если T содержит арифметику, то в T имеется автономная последовательность замкнутых формул.*

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 имеется изоморфизм любого перечислимого частично упорядоченного множества с перечислимым же порядком, разрешимым на самом множестве, в частично упорядоченное соотношением $\vdash_T (A \supset B)$ множество формул T.*

Следствие 2. *Если T содержит арифметику, то имеется изоморфизм любой булевой алгебры рассматриваемого типа в алгебру (псевдо-алгебру) Линденбаума — Тарского T.*

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Если система формул* $A_1, \ldots, A_m$, A *автономна, формулы* $B_1, \ldots, B_k$, $C_1, \ldots, C_l$ *построены из* $A_1, \ldots, A_n$ *при помощи лишь пропозициональных связок, то* $B_1, \ldots, B_k \vdash_T C_1 \vee \ldots \vee C_l$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $B_1, \ldots, B_k, A \vdash_T C_1 \vee \ldots \vee C_l$, *и тогда и только тогда, когда* $B_1, \ldots, B_k \vdash_T C_1 \vee \ldots \vee C_l \vee A$.

Доказательство леммы легко производится при помощи секвенций.

Булевыми полиномами над множеством $E \subseteq M$ будем называть выражения, составленные из элементов E при помощи знаков $\cup$, $\cap$, $^{-}$, а также сами элементы E. Естественно определяющееся значение полинома $\mathfrak{A}$ будем обозначать $\mathfrak{z}\llcorner \mathfrak{A} \lrcorner$.

$X \in M$ выражается через $E \subseteq M$, если X является значением некоторого полинома над E. Если E конечно, то множество элементов, выражающихся через E, конечно. Алгорифм, определенный на начальном отрезке натурального ряда и перечисляющий без повторений M, обозначим r. Если $X \in M$, $X = r(n)$, то будем обозначать X через n. Главным элементом M называется элемент n такой, что $n \neq 0$, $n \neq 1$, $n \in M$ и n не выражается через $\{m \mid m < n\}$ (это множество будем обозначать M_n). Множество, составленное из элементов M, выражающихся через M_n, 0 и 1, будем обозначать $\mathfrak{M}_n$.

Пусть $m \in M$. Тогда можно найти такое i_m, что $m \in \mathfrak{M}_{i_m}$, но $m \notin \mathfrak{M}_{i_m - 1}$. Сопоставим всякому $m \in M$ полином C_m над M_{i_m}, значением которого является m. Его будем называть минимальным представлением m. Если m — главный, то минимальное представление m будем считать совпадающим с m.

Пусть f — произвольная функция из M в множество формул T. Через $\hat{f}$ будем обозначать функцию из множества полиномов над M в множество формул T, определенную следующим образом:

а) $\hat{f}(m) = m$, если $m \in M$;

б) $\hat{f}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = \neg\neg(\hat{f}(\mathfrak{A}) \vee \hat{f}(\mathfrak{B}))$;

в) $\hat{f}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = \hat{f}(\mathfrak{A}) \,\&\, \hat{f}(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — полиномы над M;

г) $\hat{f}(\overline{\mathfrak{A}}) = \neg \hat{f}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}$ — полином над M.

Пусть $m \in M$ — главный. Определим $\sup m$ и $\inf m$: $\sup m = \bigcap k$ $(m \preccurlyeq k,\ k \in \mathfrak{M}_m)$; $\inf m = \bigcup k$ $(k \preccurlyeq m,\ k \in \mathfrak{M}_m)$.

Обозначим последовательность автономных формул, существование которой оговорено в условиях теоремы, φ.

Теперь можно построить искомый изомофизм f:

$$f(X) = \begin{cases} \neg(A \supset A), \text{ если } X = 0; \\ (A \supset A), \text{ если } X = 1; \\ \hat{f}(C_{\sup X}) \,\&\, (\hat{f}(C_{\inf X}) \vee \varphi(X)), \text{ если } X \text{ — главный}; \\ \hat{f}(CX), \text{ если } X \text{ — не главный}. \end{cases}$$

Чтобы показать, что f — изоморфизм, достаточно доказать следующее утверждение: *для всех* k *и любых полиномов над* $\mathfrak{M}_k$, $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{z}\llcorner \mathfrak{A} \lrcorner \preccurlyeq \mathfrak{z}\llcorner \mathfrak{B} \lrcorner$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_T \hat{f}(\mathfrak{A}) \supset \hat{f}(\mathfrak{B})$.

Доказательство производится индукцией по k. Базис индукции тривиален. Шаг. Нетривиален лишь только тот случай, когда k — главный. В этом случае сначала докажем частное утверждение, полагая, что $\mathfrak{A} = k$, а $\mathfrak{B}$ — полином над $\mathfrak{M}_k$, или наоборот,

$$\vdash_T f(\sup k) \,\&\, (f(\inf k) \vee \varphi(k)) \supset \hat{f}(\mathfrak{B})$$

тогда и только тогда, когда

$$\vdash_T f(\sup k) \,\&\, f(\inf k) \supset \hat{f}(\mathfrak{B}) \quad \text{и} \quad \vdash_T f(\sup k) \,\&\, \varphi(k) \supset \hat{f}(\mathfrak{B}).$$

$$\vdash_T \hat{f}(\mathfrak{A}) \supset f(\sup k) \,\&\, (f(\inf k) \vee \varphi(k))$$

тогда и только тогда, когда

$$\vdash_T \hat{f}(\mathfrak{A}) \supset f(\sup k) \ \ \text{и} \ \ \vdash_T \hat{f}(\mathfrak{A}) \supset f(\inf k) \vee \varphi(k).$$

Но

$$\vdash_T f(\sup k) \& \varphi(k) \supset \hat{f}(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow \vdash_T f(\sup k) \supset \hat{f}(\mathfrak{B}),$$

$$\vdash_T \hat{f}(\mathfrak{A}) \supset f(\inf k) \vee \varphi(k) \Leftrightarrow \vdash_T \hat{f}(\mathfrak{A}) \supset f(\inf k),$$

и, по предположению индукции, эти предложения эквивалентны $\mathfrak{z}\llcorner \mathfrak{A} \lrcorner \preccurlyeq \inf k$ и $\sup k \preccurlyeq \mathfrak{z}\llcorner \mathfrak{B} \lrcorner$ соответственно, что для элементов $\mathfrak{M}_k$ эквивалентно $\mathfrak{z}\llcorner \mathfrak{A} \lrcorner \preccurlyeq k$, $k \preccurlyeq \mathfrak{z}\llcorner \mathfrak{B} \lrcorner$.

Используя исчисление секвенций, легко доказать общее утверждение индукцией по построению полиномов над $\mathfrak{M}_k$. Отсюда вытекают свойства 1)—4).

В случае интуиционистского T заметим, что если φ — автономная последовательность формул, то ψ определяемая путем $\psi(n) = \neg\neg\varphi(n)$,— тоже автономная последовательность формул.

Доказательство теоремы 2. Пусть построены $\varphi(0), \varphi(1), \ldots \ldots, \varphi(n-1)$. Используя обобщение идеи Россера ([1]), строим $\varphi(n)$.

Стандартным образом занумеруем булевы векторы длины n числами от 0 до 2^{n-1}. Пусть при $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ $A(\underline{k}, \underline{a}, \underline{b})$ нумерически выражает ([3]) тот факт, что b — гёделев номер вывода $A_a(\underline{a})$ из формул $\mu_1\varphi(0), \ldots \ldots, \mu_n\varphi(n-1)$, где $\mu_i = \Lambda$, если i-я координата булева вектора k есть 0, и $\neg$ — если 1. Пусть $B(\underline{k}, \underline{a}, \underline{b})$ выражают тот же факт для $\neg A_a(\underline{a})$.

Пусть

$$E = \forall b\ [\varphi(\underline{0}) \& \ldots \& \varphi(\underline{n}-\underline{1}) \supset (\neg A(\underline{0}, a, b,) \vee \exists c\ (c \leqslant b \& B(\underline{0}, a, c)))]$$
$$\& \forall b\ [\varphi(\underline{0}) \& \ldots \& \neg\varphi(\underline{n}-\underline{1}) \supset (\neg A(\underline{1}, a, b) \vee \exists c\ (c \leqslant b \& B(\underline{1}, a, c)))]$$
$$\& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\& \forall b\ [\neg\varphi(\underline{0}) \& \ldots \& \neg\varphi(\underline{n}-\underline{1}) \supset (\neg A(\underline{2^n}-\underline{1}, a, b) \vee \exists c\ (c \leqslant b \times$$
$$\times \& B(\underline{2^n}-\underline{1}, a, c)))].$$

Положим теперь $\varphi(n) = E(\underline{q})$, где q — гёделев номер E.

1) Допустим $\mu_0\varphi(0), \ldots, \mu_{n-1}\varphi(n-1) \vdash_T \varphi(n)$. Легко получить

$$\mu_0\varphi(0), \ldots, \mu_{n-1}\varphi(n-1) \vdash_T (\varphi(n) \equiv \forall b\ [\neg A(\underline{k}, \underline{q}, b) \vee \vee \exists c\ (c \leqslant b \& B(\underline{k}, \underline{q}, c))]. \tag{1}$$

Имеется такое $\underline{l}$, что $\vdash_T A(\underline{k}, \underline{q}, \underline{l})$ и, так как система $\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)$ автономна, то $\mu_0\varphi(0), \ldots, \mu_{n-1}(n-1)$ непротиворечивы относительно T и, в частности,

$$\vdash_T \neg B(\underline{k}, \underline{q}, \underline{0}),\ \ \vdash_T \neg B(\underline{k}, \underline{q}, \underline{1}), \ldots, \vdash_T \neg B(\underline{k}, \underline{q}, \underline{l}).$$

Но тогда

$$\mu_0\varphi(0), \ldots, \mu_{n-1}\varphi(n-1) \vdash_T \neg(\neg \underline{A}(\underline{k}, \underline{q}, l \vee \exists c\ (c \leqslant l \& B(\underline{k}, \underline{q}, \underline{c})).$$

И, следовательно, $\mu_0\varphi(0), \ldots, \mu_{n-1}\varphi(n-1)) \vdash_T \neg\varphi(n)$, и $\mu_0\varphi(0), \ldots \ldots, \mu_{n-1}\varphi(n-1)$ противоречива, но этого не может быть.

2) Теперь допустим $\mu_1\varphi(0), \ldots, \mu_n\varphi(n-1) \vdash_T \neg\varphi(n)$. Тогда имеется такое l, что $\vdash_T B(\underline{k}, \underline{q}, \underline{l})$ и

$$\vdash_T \forall b\ [b \leqslant \underline{l} \supset \exists c\ (c \leqslant b \& B(\underline{k}, \underline{q}, \underline{c})].$$

Но, так как $\vdash_T \neg A(\underline{k}, \underline{q}, \underline{0}), \ldots, \vdash_T \neg A(\underline{k}, \underline{q}, \underline{l}-\underline{1})$, то по (1) имеем

$$\mu_1\varphi(0), \ldots, \mu_n\varphi(n-1) \vdash_T \varphi(n),$$

что противоречит предположению индукции. Доказательство закончено.

Если T интуиционистское, доказательство аналогично.

Автор благодарит А. Г. Драгалина за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

Поступило
16 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Rosser, J. Symbolic Logic, 1, 87 (1936). [2] Р. Сикорский, Булевы алгебры, М., 1969. [3] С. К. Клини, Введение в метаматематику, И. Л., 1957.