Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 6

УДК 517.511

МАТЕМАТИКА

Ю. Ф. БОРИСОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 31 V 1971)

1°. Пусть $f(x)$, $x\in[a, b]$, $\varphi(x)$, $x\in[0,\infty)$,— вещественные функции, $\varphi(x)\geqslant 0$ на $[0,\infty)$; $\psi(f;\alpha,\beta)$ — значение некоторого фиксированного неотрицательного функционала ψ на функции $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$. Для любой упорядоченной системы точек $P=(x_0, x_1,\ldots,x_n)$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, положим

$$S(f,\varphi,\psi;P)=\sum_{i=1}^{n}\psi(f;x_{i-1},x_i)\,\varphi[\psi(f;x_{i-1}x_i)].$$

Пусть $\gamma(P)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$, $V(f,\varphi,\psi;\varepsilon)=\inf\limits_{\gamma(P)=\varepsilon}S(f,\varphi,\psi;P)$. Существует неотрицательный (возможно, бесконечный) предел

$$V(f,\varphi,\psi)=\lim_{\varepsilon\to0}V(f,\varphi,\psi;\varepsilon).$$

Теорема. *Пусть f непрерывна, $\psi(f;\alpha,\beta)$ — расстояние между точками $(\alpha,f(\alpha))$, $(\beta,f(\beta))$, измеренное в замкнутой области*

$$E=\{(x,y):\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ y\geqslant f(x)\}$$

и $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$.

Тогда $V(f,\varphi,\psi)=0$.

Здесь под точкой (x,y) понимается точка эвклидовой плоскости с прямоугольными координатами x, y, а под расстоянием, измеренным в E,— нижняя грань длин дуг, соединяющих рассматриваемые точки и проходящих в E.

Из этой теоремы вытекают аналогичные утверждения для случаев, когда $\psi(f;\alpha,\beta)$ — расстояние между точками $(\alpha,f(\alpha))$, $(\beta,f(\beta))$ на плоскости или $\psi(f;\alpha,\beta)=|f(\beta)-f(\alpha)|$ («квазиспрямляемость графика» и «квазиограниченность вариации» произвольной непрерывной функции). Верна ли теорема, когда $\psi(f;\alpha,\beta)$ — диаметр графика функции $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, неизвестно. Выяснение этого существенно связано с проблемой регулярности $C^{1,\alpha}$-погружений (при $\alpha>1/2$) двумерных римановых пространств в трехмерное эвклидово (в этой связи достаточно ограничиться случаем, когда $\varphi(x)=x^\beta$, $\beta>0$).

2°. Пусть функция $\varphi(x)$, $x\in[0,\infty)$, обладает следующими свойствами: 1) φ непрерывна и на $(0,\infty)$ непрерывно дифференцируема; 2) производная $\varphi'(x)$ не возрастает и всюду на $(0,\infty)$ $\varphi'(x)\geqslant2$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$. Обозначим $\mathfrak{M}$ множество всех непрерывных функций $g(x)$, $x\in[a,b]$, со спрямляемым графиком L_g таких, что $g(x)>f(x)$ на $[a,b]$. Пусть $x(s)$, $g[x,(s)]$, $s\in[0,S_g]$ — параметризация графика L_g функции $g\in\mathfrak{M}$ с помощью длины дуги s, отсчитываемой от точки $(a, g(a))$,

$$J(g,\varphi)=\int_0^{S_g}\varphi[g(x(s))-f(x(s))]\,ds.$$

Лемма. *Существует такая последовательность* $\{g_n\}$, $g_n \in \mathfrak{M}$, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{[x\in a,b]} [g_n(x) - f(x)] = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} J(g_n, \varphi) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим наряду с $J(g, \varphi)$ функционал $J(g, \sqrt{\varphi})$ и возьмем такую последовательность $\{g_n\}$, $g_n \in \mathfrak{M}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} J(g_n, \sqrt{\varphi}) = \inf\limits_{g\in\mathfrak{M}} J(g, \sqrt{\varphi})$. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} [g_n(x) - f(x)] = 0. \tag{2,1}$$

Действительно, в таком случае последовательность $\{g_n\}$ обладает требуемым свойством, поскольку

$$J(g_n, \varphi) \leqslant \sqrt{\varphi\,[\sup_{x\in[a,b]} [g_n(x) - f(x)]]}\, J(g_n, \sqrt{\varphi}),$$

$J(g_n, \sqrt{\varphi})$ ограничены по построению и $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$.

Допустим, (2.1) неверно. Из ограниченности $J(g_n, \sqrt{\varphi})$ легко вытекает ограниченность $\sup\limits_{x\in[a,b]}[g_n(x) - f(x)]$ и потому, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} [g_n(x) - f(x)] = \varepsilon_0 > 0. \tag{2,2}$$

Пусть $g \in \mathfrak{M}$, $\inf\limits_{x\in[a,b]}[g(x) - f(x)] = \delta > 0$. Тогда $g - \delta/2 \in \mathfrak{M}$. Имеем

$$J(g, \sqrt{\varphi}) - J(g - \delta/2, \sqrt{\varphi}) = \int_0^{S_g} \delta/2\, (\sqrt{\varphi})'_{y(s)} ds,$$

$$g[x(s)] - f[x(s)] - \delta/2 < y(s) < g[x(s)] - f[x(s)].$$

Ввиду свойств функции φ получаем оценку

$$J(g, \sqrt{\varphi}) - J(g - \delta/2, \sqrt{\varphi}) \geqslant \frac{1}{2}\delta S_g \frac{1}{\sqrt{\varphi\,[\sup\limits_{x\in[a,b]} [g(x) - f(x)]]}}. \tag{2,3}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} J(g_n, \sqrt{\varphi}) = \inf\limits_{g\in\mathfrak{M}} J(g, \sqrt{\varphi})$, из соотношений (2,2), (2,3) следует

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{x\in[a,b]} [g_n(x) - f(x)] = 0. \tag{2,4}$$

Задавшись произвольным достаточно малым $\varepsilon > 0$, найдем такое n, что одновременно выполнены неравенства

$$J(g_n, \sqrt{\varphi}) < \inf_{g\in\mathfrak{M}} J(g, \sqrt{\varphi}) + \varepsilon, \tag{2,5}$$

$$\Big| \sup_{x\in[a,b]} [g_n(x) - f(x)] - \varepsilon_0 \Big| < \varepsilon, \tag{2,6}$$

$$\inf_{x\in[a,b]} [g_n(x) - f(x)] < \varepsilon. \tag{2,7}$$

Возьмем $k \geqslant 1$, подчиненное условию

$$(k+1)\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 / 2. \tag{2,8}$$

Ввиду неравенств (2,6) — (2,8) существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что

$$g_n(x_1) - f(x_1) = \sup_{x\in[a,b]} [g_n(x) - f(x)], \tag{2.9}$$

$$g_n(x_2) - f(x_2) = k\varepsilon, \tag{2,10}$$

а для всех промежуточных точек $g_n(x) - f(x) > k\varepsilon$. Участок графика функции g_n, ограниченный точками $(x_1, g_n(x_1))$, $(x_2, g_n(x_2))$, продолжим за точку $(x_1, g_n(x_1))$ до первой из точек $(x_3, g_n(x_3))$, где $g_n(x_3) - f(x_3) =$

$= k\varepsilon$; если же такой точки не встретится, то до одного из концов графика. Полученный участок графика обозначим l, его длину $s(l)$. Преобразуем график функции g_n следующим образом: сначала параллельно сдвинем участок l «вниз» на отрезок длины $^1/_2 k\varepsilon$, не трогая остальной части графика; «укоротив» сдвинутый участок со стороны его концов, проектирующихся внутрь отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ оси x (таких концов два или один), ликвидируем образовавшиеся разрывы (два или один) с помощью прямолинейных отрезков (не вертикальных). Получим график функции $g \in \mathfrak{M}$. Пользуясь оценкой (2,3), примененной к функции с графиком l, учитывая произвольную малость «укорочения» сдвинутой дуги l и неравенство (2,6), заключаем, что существует функция $g \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющая неравенству

$$J(g, \sqrt{\varphi}) < J(g_n, \sqrt{\varphi}) - {}^1/_2 k\varepsilon\, s(l)\cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi(\varepsilon_0+\varepsilon)}} + 2k\varepsilon \sqrt{\varphi(k\varepsilon)}. \quad (2{,}11)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ множество пар (x_1, x_2), $x_1, x_2 \in [a, b]$, таких, что $|f(x_2) - f(x_1)| = \varepsilon$, и положим $\delta(f, \varepsilon) = \inf\limits_{(x_1, x_2)} |x_2 - x_1|$, если $\mathfrak{R}(\varepsilon) \neq \phi$, и $\delta(f, \varepsilon) = 1$, если $\mathfrak{R}(\varepsilon) = \phi$. Ввиду непрерывности f $\delta(f, \varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon > 0$. Из (2,6) и (2,8) вытекает оценка

$$s(l) \geqslant \min\{\varepsilon_0/4, \delta(f, \varepsilon_0/4)\} = \delta_0 > 0, \quad (2{,}12)$$

а из (2,11) и (2,12) следует

$$J(g, \sqrt{\varphi}) < J(g_n, \sqrt{\varphi}) - \varepsilon k[{}^1/_2\delta_0 / \sqrt{\varphi(\varepsilon_0+\varepsilon)} - 2\sqrt{\varphi(k\varepsilon)}]. \quad (2{,}13)$$

Возьмем произвольное число $m > 1$ и положим $\varepsilon = \varepsilon_0/(2m^2)$, $k + 1 = m$. При этом условие (2,8) соблюдается, $k\varepsilon < \varepsilon_0/(2m)$. Пусть $m_0 > 1$ столь велико, что при $m \geqslant m_0$ указанный выбор ε, k обеспечивает выполнение неравенства

$$^1/_2\delta_0/\sqrt{\varphi(\varepsilon_0+\varepsilon)} - 2\sqrt{\varphi(k\varepsilon)} \geqslant {}^1/_3\delta_0/\sqrt{\varphi(\varepsilon_0)} \quad (2{,}14)$$

(мы воспользовались условием $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$).

Теперь возьмем $m \geqslant m_0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$^1/_3(m-1)\delta_0 / \sqrt{\varphi(\varepsilon_0)} \geqslant 1. \quad (2.15)$$

Из (2,13) — (2,15) следует, что при $\varepsilon = \varepsilon_0/(2m^2)$, $k = m - 1$, $J(g, \sqrt{\varphi}) < J(g_n, \sqrt{\varphi}) - \varepsilon$, что противоречит неравенству (2,5). Лемма доказана.

3°. Доказательство теоремы. Произвольную неотрицательную функцию $\varphi(x)$, $x \in [0, \infty)$, подчиненную условию $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$, на некотором отрезке $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$, можно мажорировать функцией, подчиненной условиям, наложенным на φ в лемме из 2°. Для построения такой функции берем отрезок $[0, \alpha]$, на котором φ ограничена, и вне его заменяем φ функцией $\varphi(\alpha) - \alpha + x$; берем выпуклую оболочку области, ограниченной графиком полученной функции и осью x; «верхняя» часть границы этой области есть график выпуклой функции $\varphi^*(x)$, мажорирующей данную и такой, что $\lim\limits_{x\to 0}\varphi^*(x) = 0$. Вписывая в график функции $2\varphi^*$ ломаную с бесконечным числом звеньев, достаточно быстро измельчающихся по мере приближения к началу координат, и сглаживая ее углы, получим график искомой функции.

Не ограничивая общности, будем считать, что фигурирующая в теореме функция φ дополнительно подчинена условиям 1), 2), указанным в 2°. Задавшись произвольным достаточно малым $\varepsilon > 0$, возьмем такую функцию $g \in \mathfrak{M}$, что выполнены неравенства

$$\sup_{x\in[a,b]}\, [g(x) - f(x)] \leqslant \varepsilon, \quad (3{,}1)$$

$$J(g, \varphi) \leqslant \varepsilon \quad (3{,}2)$$

(смысл обозначений тот же, что и в 2°; существование g обеспечено леммой).

Пусть $x = x(s)$, $y = g[x(s)]$, $s \in [0, S]$,— параметризация графика функции g длиной дуги s, отсчитываемой от точки $(a, g(a))$. Обозначим $\rho_0(s)$, $s \in [0, S]$, расстояние точки $A = (a, g(a))$ до графика функции $f(x)$, $x \in [a, x(s)]$, измеренное в множестве $E_0(s) = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant x(s), y \geqslant f(x)\}$. Очевидно, функция $\rho_0(s)$ непрерывна и $\rho_0(0) > 0$. Кроме того, поскольку $S \geqslant b - a$, то, считая $\varepsilon < 2(b-a)$, получим, что непрерывная убывающая функция $\rho_0(s) - 2s$ меняет знак на концах отрезка $[0, S]$. Существует единственное s_1, $0 < s_1 < S$, такое, что $\rho_0(s_1) = 2s_1$. Функцию $\rho_1(s)$, $s \in [s_1, S]$, определим так же, как $\rho_0(s)$, с той разницей, что вместо A берется точка $A_1 = (x(s_1), g[x(s_1)])$, а вместо $E_0(s)$ — множество $E_1(s) = \{(x, y): x(s_1) \leqslant x \leqslant x(s), \ y \geqslant f(x)\}$. Если $\rho_1(S) - 2(S - s_1) \geqslant 0$, полагаем $s_2 = S$. Если $\rho_1(S) - 2(S - s_1) < 0$, найдется единственное s_2, $s_1 < s_2 < S$, такое, что $\rho_1(s_2) = 2(s_2 - s_1)$. Аналогично определяем числа $s_3 > s_2$, $s_4 > s_3$ и т. д., до тех пор пока не получим число $s_n = S$ (такое n найдется, поскольку при всяком $k > 0$, для которого $s_k < S$, по построению $s_k - s_{k-1} = {}^1/_2\rho_{k-1}(s_k) \geqslant {}^1/_2\delta > 0$, где δ— расстояние между графиками функций g и f). Обозначим $r_{k-1}(s)$, $s_{k-1} \leqslant s \leqslant s_k$ ($s_0 = 0$ по определению) расстояние точки $(x(s), g[x(s)])$ до графика функции $f(x)$, $x \in [x(s_{k-1}), x(s_k)]$, измеренное в $E_{k-1}(s_k)$. Поскольку $r_{k-1}(s_{k-1}) = \rho_{k-1}(s_k) = 2(s_k - s_{k-1})$, для любого s, $s_{k-1} \leqslant s \leqslant s_k$, имеем

$$r_{k-1}(s) \geqslant {}^1/_2 r_{k-1}(s_{k-1}). \tag{3,3}$$

Из (3,2), (3,3) и соотношения $s_k - s_{k-1} = {}^1/_2 r_{k-1}(s_{k-1})$ вытекает

$$\sum_{k=1}^{n} {}^1/_2 r_{k-1}(s_{k-1})\ \varphi[{}^1/_2 r_{k-1}(s_{k-1})] \leqslant \varepsilon. \tag{3,4}$$

Очевидно, при любом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, существуют такие два числа x_k', x_k'', $x(s_{k-1}) \leqslant x_k' \leqslant x_k'' \leqslant x(s_k)$, что $r_{k-1}(s_{k-1})$, $r_{k-1}(s_k)$ равны длинам отрезков A_k', B_k', A_k'', B_k'', соединяющих точки A_k', A_k'' графика g с параметрами s_{k-1}, s_k с точками B_k', B_k'' графика f с абсциссами x_k', x_k''. Пусть $P = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$, где $x_0, \ldots, x_m$ — последовательные точки множества $\{a, x_1', x_1'', \ldots, x_n', x_n'', b\}$. Из определения точек x_k', x_k'', функционала ψ, фигурирующего в теореме, неравенства (3,1) и очевидного соотношения $r_{k-1}(s_k) \leqslant {}^3/_2 r_{k-1}(s_{k-1})$, следует

$$S(f, \varphi, \psi; P) < 4\varepsilon\,\varphi(2\varepsilon) + \sum_{k=1}^{n} 9 r_{k-1}(s_{k-1})\ \varphi[3 r_{k-1}(s_{k-1})] \tag{3,5}$$

(оценка грубая).

Из условий, наложенных на φ, следует, что $\varphi(kx) \leqslant k\varphi(x)$ для любого натурального k. Поэтому $\varphi[3r_{k-1}(s_{k-1})] \leqslant 6\varphi[{}^1/_2 r_{k-1}(s_{k-1})]$ и неравенства (3,5), (3,4) дают

$$S(f, \varphi, \psi; P) < 4\varepsilon\,\varphi(2\varepsilon) + 108\varepsilon. \tag{3,6}$$

Кроме того, очевидно, $\gamma(P) \leqslant 3\varepsilon$. Ввиду произвольности ε отсюда вытекает доказываемое соотношение.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
21 V 1971