Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 6

УДК 539.371 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Е. А. ВОЛЬМИР

ПОВЕДЕНИЕ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОГО ДИНАМИЧЕСКОГО СЖАТИЯ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 27 V 1971)

Поведение замкнутых круговых цилиндрических оболочек под действием осевой динамической сжимающей нагрузки рассматривалось в ряде исследований, подробная библиография по которым приведена в ([1]), см. также ([2]). Между тем, динамическому выпучиванию открытых подкрепленных цилиндрических оболочек была посвящена только работа ([3]), в которой разбирался один частный пример. Ниже эта задача исследуется в более общем виде.

Рассмотрим пологую круговую цилиндрическую панель, шарнирно опертую по краям, в предположении, что она подвергается динамическому сжатию вдоль образующей. Считая скорость взаимного смещения кромок панели малой по сравнению со скоростью распространения звука в материале панели, будем учитывать лишь составляющую сил инерции, соответствующую нормальному прогибу панели; иными словами, откажемся от рассмотрения процесса распространения упругих волн в срединной поверхности оболочки. Деформации предполагаются лежащими в пределах упругости.

Выпишем основные динамические уравнения нелинейной теории пологих оболочек ([1]):

$$\frac{D}{h}\nabla^4(w-w_0)=L(w,\Phi)-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi=-\frac{1}{2}\left[L(w,w)-L(w_0,w_0)\right]-\frac{1}{R}\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Здесь R и h — радиус кривизны срединной поверхности и толщина панели соответственно, $D=Eh^3/[12(1-\mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость, γ — удельный вес материала, Φ — функция напряжений в срединной поверхности, $w(x, y, t)$ и $w_0(x, y)$ — соответственно полный и начальный прогибы точек срединной поверхности; координаты x и y откладываются вдоль образующей и по дуге панели; t — время, L — известный билинейный оператор.

Допустим, что осевая сжимающая нагрузка задана произвольной функцией времени $p=\varphi(t)$. Применяем процедуру Бубнова — Папковича, выбирая в качестве аппроксимирующих функций для полного и начального прогибов

$$w=f\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\qquad w_0=f_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{3}$$

Здесь a и b — стороны панели, ориентированные соответственно вдоль образующей и по дуге; под m, n понимается количество полуволн вдоль сторон a, b соответственно. Тогда придем к нелинейному дифференциальному уравнению относительно стрелы прогиба

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}-\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2\psi(\tau)\zeta+(\zeta-\zeta_0)\left\{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2+n^2\right]^2+\frac{3(1-\mu^3)}{\pi^4}\frac{m^4k^3}{[m^2+(\lambda n)^2]^2}+\right.$$

$$+\frac{3}{16}(1-\mu^2)\left[\left(\frac{m}{\lambda}\right)^4+n^4\right]\zeta(\zeta+\zeta_0)\Big\}-\alpha\frac{2(1-\mu^2)}{\pi^4}kn(\zeta-\zeta_0)\left\{\frac{16m^3}{[m^2+(\lambda n)^2]^2}\zeta+\right.$$

$$\left.+\frac{\zeta+\zeta_0}{m}\right\}=0. \qquad (4)$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\zeta=\frac{f}{h},\ \zeta_0=\frac{f_0}{h},\quad \lambda=\frac{a}{b},\quad k=\frac{b^2}{Rh},\quad \tau=\omega t,$$

$$\psi(\tau)=\frac{b^4[3(1-\mu^2)]^{3/2}}{\pi^4h^3}\varphi(\tau),$$

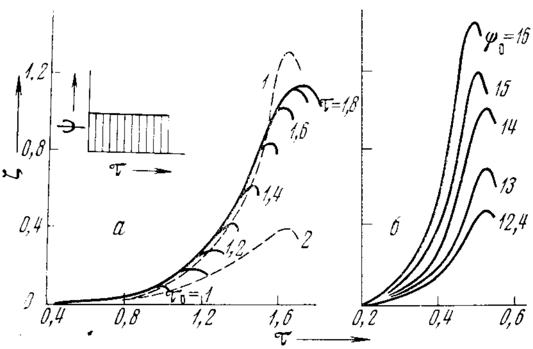
в которые входят

$$c=\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}},\quad \omega^2=\frac{\pi^2Egh^2p_0}{\gamma b^4},\quad p_0=\frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)}+\frac{k^2}{4\pi^2}.$$

Параметр $\alpha=1$ при нечетных значениях m и n и $\alpha=0$ в остальных случаях.

Интегрирование уравнения (4) проводилось по методу Рунге — Кутта

Рис. 1. Зависимость параметра прогиба ζ от времени τ для прямоугольного импульса при $\zeta_0=1\cdot10^{-3}$, $k=0$, $\lambda=2$ для $\psi_0=5$ (*а*), $\tau_0=0{,}5$ (*б*). Число полуволн $m_{кр}$ в случае *б* составляет 11 для трех нижних кривых и 12 для двух верхних



на ЭЦВМ БЭСМ-2М, причем для каждого варианта нагружения варьировались числа m и n.

Исследуем вначале случай ступенчатого импульса:

$$\psi(\tau)=\begin{cases}\psi_0 & \text{при } 0\leqslant\tau\leqslant\tau_0,\\ 0 & \text{при } \tau>\tau_0.\end{cases}$$

На рис. 1*а* приведены данные вычислений для одного и того же значения $\psi_0=5$, но импульсов различной продолжительности. Сплошными линиями представлены кривые, соответствующие «критическому» числу полуволн вдоль образующей $m_{кр}$, т. е. те, у которых фронт бурного выпучивания лежит ближе всего к оси ординат. При всех значениях τ_0 $m_{кр}$ оказалось равным 7. Для параметра $\tau_0=1{,}6$ штриховыми линиями показаны кривые, отвечающие $m=6$ (кривая *1*) и $m=8$ (кривая *2*). На рис. 1*б* приведены кривые, соответствующие различным уровням нагрузки при одной и той же продолжительности импульса $\tau_0=0{,}5$ и тех же значениях геометрических параметров, что и на рис. 1*а*. Для всех вариантов нагрузки, а также различных геометрических параметров панели оказалось, что вдоль дуги в момент динамического выпучивания образуется одна полуволна ($n=1$).

Результаты всех проведенных вычислений для импульсов ступенчатой формы можно объединить следующим образом. Будем условно считать «опасным» значение амплитуды прогиба, равное толщине пластинки ($\zeta=1$), и определим те сочетания величин нагрузки ψ_0 и значений импульса I, при которых впервые достигается эта амплитуда. Соответствующая кривая представлена на рис. 2, *1*. Мы видим, что бо́льшим значениям ψ_0 соответствуют меньшие значения импульса I: опасными являются тем меньшие импульсы, чем выше уровень нагрузки. Результаты аналогичных вычислений при условии, что предельной является величина прогиба, равная половине толщины панели ($\hat{\zeta} = 0{,}5$), представлены кривой *2*. Приведенные кривые относятся к удлиненным пластинкам ($k = 0$). Кривая *3* отражает соответствующую зависимость для панели с параметром кривизны $k = 12$. Она имеет такой же характер, как и предыдущие.

Далее было исследовано поведение панели при воздействии на нее экспоненциального импульса типа $\psi = Ae^{-\delta\tau}$. Получены данные, относящиеся к влиянию амплитуды нагрузки A и показателя экспоненты δ. И здесь оп-

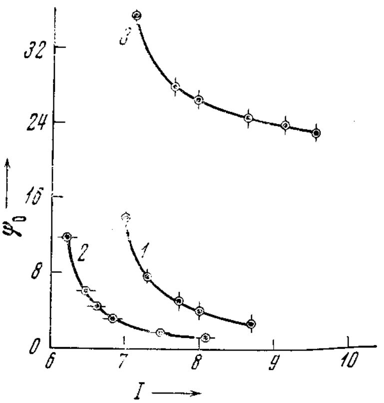


Рис. 2

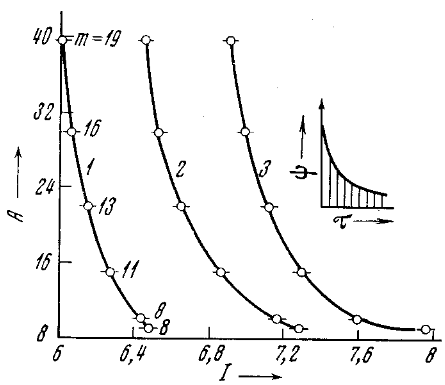


Рис. 3

Рис. 2. Соотношение между «опасными» импульсами I и параметром нагрузки ψ_0 при $\zeta_0 = 1 \cdot 10^{-3}$, $\lambda = 2$ для ступенчатого импульса

Рис. 3. Зависимость между «опасными» импульсами I и параметром нагрузки A при $\hat{\zeta} = 0{,}5$; $0{,}8$; 1 (кривые *1*, *2*, *3* соответственно) для экспоненциального импульса; принято $\delta = 0{,}5$; $\zeta_0 = 1 \cdot 10^{-3}$; $k = 0$, $\lambda = 2$

ределялась зависимость импульса, соответствующего некоторым уровням прогибов, от параметра A. Результаты вычислений, относящихся к плоской панели, отражают кривые рис. 3; они относятся к значениям прогиба $\hat{\zeta} = 0{,}5$; $0{,}8$; 1, взятым в качестве предельных. Так же, как и в случае ступенчатого закона $\psi(\tau)$, величина импульса I, необходимая для достижения того или иного параметра прогиба ζ, повышается с уменьшением нагрузки A.

Приведенный выше алгоритм позволяет рассмотреть с позиций нелинейной теории оболочек поведение круговых цилиндрических панелей под действием осевой импульсной нагрузки самого различного характера и установить в соответствии с выбранным критерием предельные величины «безопасных» импульсов.

Военно-воздушная инженерная академия
им. Н. Е. Жуковского

Поступило
7 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, «Наука», 1967. [2] Э. И. Григолюк, А. И. Сребровский, Мех. тверд. тела, № 3, 110 (1968). [3] А. С. Вольмир, ДАН, 123, № 5, 806 (1968).