Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 6

МАТЕМАТИКА

ГЕЗА ФРОЙД (GEZA FREUD)

ОБ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ С ВЕСОМ $e^{-x^2/2}$

(Представлено академиком В. С. Владимировым 31 V 1971)

Как и в статьях ([1], [2]). Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\rho(x) = e^{-x^2/2}$; $\|f\|_p$ обозначает норму пространства $L_p = L_p(-\infty, \infty)$, а L_p^* — пространство тех функций, для которых $f\rho \in L_p$; норма этого пространства $\|f\|_p = \|f\rho\|_p$ (нормы относятся к переменной x). Пусть n есть любое натуральное число, π_n — множество алгебраических многочленов не выше n-й степени; $c_0, c_1 \ldots$ — абсолютные положительные постоянные; пусть для некоторой $f \in L_p^*$

$$\varepsilon_n^{p*}(f) = \inf_{\varphi_n \in \pi_n} \|f - \varphi_n\|_p^*. \tag{1}$$

Положим $\tau(x) = x$, если $|x| \leqslant 1$, и $\tau(x) = 1$, если $|x| > 1$. Для функции $f \in L_p^*$ определим L_p^*-модуль непрерывности следующим образом:

$$\omega^*(p, f, \delta) = \sup_{0<t\leqslant\delta} \|f(x+t)\rho(x+t) - f(x)\rho(x)\|_p + \\ + \sup_{0<t\leqslant\delta} \|\tau(tx)f(x)\|_p^*. \tag{2}$$

В настоящей работе с помощью модуля непрерывности (2) мы решаем основную задачу приближения многочленами в норме $\|\cdot\|_p^*$.

Теорема А. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, r — неотрицательное целое число и $f(x)$ — r-раз итерированная примитивная функция от $f^{(r)} \in L_p^*$ $(f^0 = f)$. Тогда*

$$\varepsilon_n^{(p)*}(f) \leqslant c_0 e^{c_1 r} n^{-r/2} \omega^*(p; f^{(r)}; n^{-1/2}). \tag{3}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 статьи ([1]) достаточно рассмотреть случай $r = 0$. Пусть $h = n^{-1/2}$, $\varphi_n(x) = \rho(x)f(x)$, если $|x| \leqslant n^{1/2}$, и $\varphi_n(x) = 0$, если $|x| > n^{1/2}$. Тогда, ввиду (2),

$$\|\varphi_n(x+t) - \varphi_n(x)\|_p \leqslant \omega^*(p; f; n^{-1/2}) \qquad (|t| \leqslant n^{-1/2}). \tag{4}$$

Для приближения $f(x)$ введем функцию

$$f_h(x) = h^{-1} \int_x^{x+h} \varphi_n(t)\,dt \cdot \rho^{-1}(x).$$

Очевидно,

$$\rho(x) f_h'(x) = h^{-1}[\Phi_1(x) + \Phi_2(x)], \tag{5}$$

$$\Phi_1(x) = \varphi_n(x+h) - \varphi_n(x), \quad \Phi_2(x) = x \int_x^{x+h} \varphi_n(t)\,dt. \tag{6}$$

Используя неравенство Минковского, получим

$$\|f_h - f\|_p^* = h^{-1} \left\| \int_0^h [\varphi_n(x+t) - \rho(x)f(x)]\,dt \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant h^{-1} \left\| \int_0^h [\rho(x+t)f(x+t) - \rho(x)f(x)]\,dt \right\|_p +$$

$$+ h^{-1}\left\| \int_0^h [\varphi_n(x+t) - \rho(x+t) f(x+t)]\, dt \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant h^{-1} \int_0^h \| \rho(x+t) f(x+t) - \rho(x) f(x) \|_p \, dt + \| \varphi_n - \rho f \|_p \leqslant \omega^*(p;\, f;\, n^{-1/2}). \qquad (7)$$

Воспользовавшись (4) и тем, что $\varphi_n(x) = 0$, если $|x| > n^{1/2}$, и, следовательно, $\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x) = 0$, если $|x| > 2n^{1/2} \geqslant n^{1/2} + h$,

$$\| \Phi_2 \|_p \leqslant \int_0^h \| x\, \varphi_n(x+t) \|_p \, dt \leqslant \| hx\, \varphi_n(x) \|_p + \int_0^h \| x\, [\varphi_n(x+t) - \varphi_n(x)] \|_p \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \| \tau(hx) f(x) \|_p^* + 2n^{1/2} \int_0^h \| \varphi_n(x+t) - \varphi_n(x) \|_p \, dt \leqslant 3\omega^*(p;\, f;\, n^{-1/2}).$$

Таким образом, из (4) и (5) получаем

$$\| f_h' \|_p^* \leqslant h^{-1} [\| \Phi_1 \|_p + \| \Phi_2 \|_p] \leqslant 4h^{-1} \omega^*(p;\, f;\, n^{-1/2}). \qquad (8)$$

В силу формулы (3) работы ([1]) из (8) следует

$$\varepsilon_n^{(p)*}(f_h) \leqslant c_2 n^{-1/2} \| f_h' \|_p^* \leqslant 4c_2 \omega^*(p;\, f;\, n^{-1/2}).$$

Наконец, ввиду (7),

$$\varepsilon_n^{(p)*}(f) \leqslant \| f - f_h \|_p^* + \varepsilon_n^{(p)*}(f_h) \leqslant (1 + 4c_2)\, \omega^*(p;\, f;\, n^{-1/2}).$$

Теорема доказана.

Лемма 1. *Если $P_n \in \pi_n$, то*

$$\| (\rho P_n)' \|_p \leqslant \| P_n' \|_p^* + \| x P_n(x) \|_p^* \leqslant c_3 n^{1/2} \| P_n \|_p^*. \qquad (9)$$

Доказательство. Так как $[\rho(x) P_n(x)]' = \rho(x) P_n'(x) - x\rho(x) P_n(x)$, (9) следует из теоремы 1 и леммы 2 статьи ([2]).

Теорема Б. *Для любой $f \in L_p^*$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$*

$$\omega^*(p;\, f;\, n^{-1/2}) \leqslant c_4 n^{-1/2} \left[\| f \|_p^* + \sum_{s=0}^{n} (s+1)^{-1/2} \varepsilon_s^{(p)*}(f) \right]. \qquad (10)$$

Замечание. Из теорем А и Б следует, что утверждения $\omega^*(p; f; \delta) = O(\delta)^\alpha$ и $\varepsilon_n^{(p)*}(f) = O(n^{-\alpha/2})$ равносильны при $0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Пусть $N = 2^m \leqslant n \leqslant 2^{m+1}$ и

$$U_N(p;\, f) = \| f \|_p^* + \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^{\nu/2} \varepsilon_{2^\nu}^{(p)*}(f).$$

Тогда ввиду того, что $\varepsilon_n^{(p)*}$ — невозрастающая функция от n,

$$U_N(p;\, f) \leqslant c_5 \left[\| f \|_p^* + \sum_{s=0}^{n} (s+1)^{-1/2} \varepsilon_s^{(p)*}(f) \right], \qquad (11)$$

$$\varepsilon_N^{(p)*}(f) \leqslant 2n^{-1/2} U_N(p;\, f). \qquad (12)$$

Пусть $\{P_s \in \pi_s\}$ — такая последовательность многочленов, что

$$\| f - P_s \|_p^* \leqslant 2\varepsilon_s^{(p)*}(f). \qquad (13)$$

Из (9) и (13) получаем

$$\| P_{2s}' - P_s' \|_p^* + \| x\, [P_{2s}(x) - P_s(x)] \|_p^* \leqslant 2c_3 s^{1/2} \| P_{2s} - P_s \|_p^* \leqslant$$

$$\leqslant 4c_3 s^{1/2} [\varepsilon_{2s}^{(p)*}(f) + \varepsilon_s^{(p)*}(f)] \leqslant 8c_3 s^{1/2} \varepsilon_s^{(p)*}(f),$$

$$\| P_1' \|_p^* + \| x P_1(x) \|_p^* \leqslant c_3 \| P_1 \|_p^* \leqslant c_3 [\| f \|_p^* + \varepsilon_1^{(p)*}(f)].$$

Таким образом,

$$\| P'_N \|_p^* + \| x P_N(x) \|_p^* \leqslant \| P'_1 \|_p^* + \| x P_1(x) \|_p^* +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{m-1} \{ P'_{2^{\nu+1}} - P'_{2^\nu} \| + \| x [P_{2^{\nu+1}}(x) - P_{2^\nu}(x)] \|_p^* \} \leqslant c_6 U_N(p, f). \qquad (14)$$

Поэтому и в силу (13), (9), (14) и (12), если $0 < t \leqslant n^{-1/2}$, то

$$\| \rho(x+t) f(x+t) - \rho(x) f(x) \|_p \leqslant \rho(x+t) P_N(x+t) - \rho(x) P_N(x) \|_p +$$
$$+ 4\varepsilon_N^{(p)*}(f) \leqslant t \| (\rho P_N)' \|_p + 4\varepsilon_N^{(p)*}(f) \leqslant c_7 n^{-1/2} U_N(p; f). \qquad (15)$$

Из (13) и (14) следует при любом $T > 0$

$$\left\{ \int_{-T}^{T} \left| \frac{x}{T} f(x) \rho(x) \right|^p dx \right\}^{1/p} \leqslant \| f - P_N \|_p^* + \frac{1}{T} \| x P_N(x) \|_p^*, \qquad (16)$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^{-T} | f\rho |^p dx + \int_{T}^{\infty} | f\rho |^p dx \right\}^{1/p} \leqslant \| f - P_N \|_p^* + \frac{1}{T} \| x P_N(x) \|_p^*. \qquad (17)$$

Из (16), (17), (12) и (14) получаем, что при $0 < T^{-1} = t \leqslant n^{-1/2}$

$$\| \tau(tx) f(x) \|_p^* \leqslant c_8 n^{-1/2} U_N(p; f). \qquad (18)$$

Формулы (15), (18) и (11) доказывают неравенство (10).

Теорема В. *Если для некоторого натурального числа r*

$$\sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{r/2-1} \varepsilon_s^{(p)*}(f) < \infty. \qquad (19)$$

то f есть r-раз итерированный интеграл от некоторой функции $f^{(r)} \in L_p^*$,

$$\varepsilon_n^{(p)*}(f^{(r)}) \leqslant c_9 e^{c_{10} r} \left[n^{r/2} \varepsilon_n^{(p)*}(f) + \sum_{s=n+1}^{\infty} (s+1)^{r/2-1} \varepsilon_s^{(p)*}(f) \right], \qquad (20)$$

а также

$$w^*(p; f^{(r)}; n^{-1/2}) \leqslant c_{11} e^{c_{10} r} \left[n^{-1/2} \sum_{s=0}^{n} (s+1)^{(r-1)/2} \varepsilon_s^{(p)*}(f) + \sum_{s=n+1}^{\infty} (s+1)^{r/2-1} \varepsilon_s^{(p)*}(f) \right]. \qquad (21)$$

Замечание. Таким образом, $\varepsilon_n^{(p)*}(f) = O(n^{-(r+\alpha)/2})$ в том и только в том случае выполняется для натурального r и $0 < \alpha < 1$, если r есть r-раз итерированный интеграл от такой функции $f^{(r)} \in L_p^*$, для которой $w^*(p; f^{(r)}; \delta) = O(\delta^\alpha)$.

Доказательство. При $r = 1$ (20) была доказана как теорема 2 статьи ([2]) автора. Общий случай доказывается аналогичным образом. Мы получаем (21), подставляя (20) в (10).

Математический институт
Академии наук Венгрии
Будапешт

Поступило
24 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Фройд, ДАН, 191, № 2, 293 (1970). [2] Г. Фройд, ДАН, 197, № 4, 790 (1971).