

В. И. ПАУЛАУСКАС

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ПОСРЕДСТВОМ ПСЕВДОМОМЕНТОВ

(Представлено академиком Ю. П. Липшиком 21 XII 1970)

1. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторый класс борелевских множеств из R_k — k -мерного евклидова пространства со свойством: если $A \in \mathcal{E}$, то $A + x \in \mathcal{E}$ для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in R_k$ и $\lambda A \in \mathcal{E}$ для всех вещественных $\lambda > 0$. Примеры таких классов: класс $\mathcal{E}_1$, состоящий из множеств вида $A = \{x: x_1 < a_1, \dots, x_k < a_k\}$, $a_i \in R_1$; класс $\mathcal{E}_2$, состоящий из всех шаров пространства R_k ; класс $\mathcal{E}_3$ — все универсально измеримые выпуклые множества в R_k .

Определим класс k -мерных распределений $\mathcal{H}(\mathcal{E}, C(k))$ следующим образом: будем считать, что $G \in \mathcal{H}(\mathcal{E}, C(k))$, если для всех $h > 0$

$$\sup_{A \in \mathcal{E}} G(\delta(A, h)) \leq C(k)h, \quad \sup_{A \in \mathcal{E}} G(\delta(A, -h)) \leq C(k)h,$$

где $\delta(A, h) = A^h \setminus A$, $\delta(A, -h) = (A^c)^h \setminus A^c$, A^h — множество всех точек расстояние для которых до A меньше, чем h , $A^c = R_k \setminus A$ — дополнение множества A . Например, если через Φ_A обозначить нормальное распределение с корреляционно-ковариационной матрицей Λ , имеющей собственные значения λ_i и $\min_{i \leq k} \lambda_i \geq C > 0$, то в (6) было показано, что

$$\Phi_A \in \mathcal{H}(\mathcal{E}_3, \sqrt{2/(\pi C)} k^{1/2}).$$

Пусть ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — k -мерные случайные векторы (с.в.), η_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — независимые с.в. с распределением $F_i(A)$. Пусть $\mathfrak{B}_j$ — σ -алгебра, порожденная с.в. $\sum_{i=1}^j \xi_i$, а $G_j(A|\mathfrak{B}_j)$ — условное распределение ξ_j при фиксированной $\mathfrak{B}_j$; $G(A)$ и $F(A)$ соответственно обозначают распределения сумм $\sum_{i=1}^n \xi_i$ и $\sum_{i=1}^n \eta_i$.

Обозначим

$$\mu_{ij} = M \int_{R_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k} [G_j(dx|\mathfrak{B}_j) - F_j(dx)],$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad i = (i_1, \dots, i_k), \quad i_p \text{ целые, } \geq 0;$$

$$\mu_m = \sum_{j=1}^n \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=m} \mu_{ij};$$

$$v_{jr} = M \int_{R_k} (|x_1| + \dots + |x_k|)^r [G_j(dx|\mathfrak{B}_j) - F_j(dx)],$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad r > 0;$$

$$v_r = \sum_{j=1}^n v_{jr}.$$

Все приводимые далее результаты получены методом композиций с применением идей работ (1-3, 6).

Теорема 1. Если для некоторого целого $m > 0$ $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$ и вещественного $m < r \leq m+1$ $v_r < \infty$, а $F \in \mathcal{H}(\mathcal{E}, C(k))$, то для всех $n \geq 1$

$$\sup_{A \in \mathcal{E}} |G(A) - F(A)| \leq C_1(k, m, r) v_r^{1/(1+r)},$$

где $C_1(k, m, r)$ зависит лишь от $C(k)$ и m, r .

Теорема представляет новый результат и в случае независимых с.в. ξ . Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Если для некоторого целого $m > 0$ $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, $v_r < \infty$, $m < r \leq m+1$, и функция распределения $F(A)$, $A \in \mathcal{E}_1$, имеет маргинальные функции распределения $F_i(x)$, $x \in R_1$, $i = 1, 2, \dots, k$, для которых $\sup_x |F_i'(x)| \leq K_i$, то

$$\sup_{A \in \mathcal{E}_1} |F(A) - G(A)| \leq C_2(k, m, r) v_r^{1/(r+1)},$$

где $C_2(k, m, r)$ зависит от k, m, r и $K = \sum_{i=1}^k K_i$.

Действительно, легко удостовериться, что если $A \in \mathcal{E}_1$, то $F(\delta(A, \pm h)) \leq \sum_{i=1}^k K_i h$, т. е. $F \in \mathcal{H}(\mathcal{E}_1, K)$. В одномерном случае, если предположить, что и случайные величины ξ_i независимы, то из теоремы 2 вытекает теорема 1 из (4), доказанная методом характеристических функций.

Еще одно следствие из теоремы 1 можно получить с помощью следующего утверждения.

Лемма 1. Пусть $|F(dx)| \leq \psi(x) dx$, где $\psi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция и $\psi(x) \leq \varphi(r)$, когда $|x| = r$, $x \in R_k$. Если $\varphi(r)$ дифференцируема, $\varphi(r) r^{k-1} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и $\int_0^\infty |\varphi'(r)| r^{k-1} dr = B$, то

$$F \in \mathcal{H} \left\{ \mathcal{E}_3, \frac{4\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} B \right\}.$$

Приведенная лемма легко следует из результатов Б. фон Бар (7).

Доказательство теоремы 1 опирается на три леммы. Пусть

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} a)^k} \exp \left(-\frac{1}{2a} \sum_{i=1}^k x_i^2 \right), \quad \Phi_a(A) = \int_A \varphi_a(x) dx, \quad x \in R_k, \quad a > 0.$$

Лемма 2. Для любого распределения G на R_k и распределения $F \in \mathcal{H}(\mathcal{E}, C(k))$ имеет место неравенство

$$\sup_{A \in \mathcal{E}} |G(A) - F(A)| \leq 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} |[G - F] * \Phi_\delta(A)| + C_2(k) \delta,$$

где $C_2(k)$ зависит от $k, C(k)$.

Доказательство леммы почти совпадает с доказательством леммы 2 из (3).

Лемма 3. При обозначениях теоремы 1 имеет место неравенство

$$\sup_{A \in \mathcal{E}} |[F - G] * \Phi_\delta(A)| \leq \sum_{i=1}^n M \sup_{A \in \mathcal{E}} |[F_i * \Phi_\delta - G_i(\cdot | \mathfrak{F}_i) * \Phi_\delta](A)|.$$

Лемма 3 обобщает на многомерный случай лемму 3.2 из (2).

Лемма 4. Пусть $U(A)$, $A \in \mathcal{E}$, — некоторая ограниченная функция множеств. Для фиксированного множества $A \in \mathcal{E}$ определим функцию $V(x) = \int_{R_k} U(A+z) \varphi_a(x-z) dz$, $a > 0$, и запишем для нее разложение

в ряд Тейлора

$$V(x) = V(0) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} \left[\left(\sum_{i=1}^k x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j V \right](0) + r_m(x).$$

Для любого $0 < \delta \leq 1$ и всех $x \in R_k$

$$|r_m(x)| \leq C_3(m) \sup_{A \in \mathcal{E}} |U(A)| \left(a^{-1} \sum_{i=1}^k |x_i| \right)^{m+\delta},$$

$$C_3(2) = 2\sqrt{2}/\sqrt{\pi e}, \quad C_3(m) \leq 2/\sqrt{m!}.$$

2. В случае сближения с нормальным законом результаты приведем для $k=1$, но никаких принципиальных трудностей в методе композиций не возникает и при $k > 1$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — случайные величины, $S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$,

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_n, \quad F_n(x) = P\{Z_n < x\}, \quad F_j(x|y) = P\{\xi_j < x | S_{j-1} = y\},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad \bar{v}_3 = \sup_{j \leq n} M \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 |d(F_j(x|y) - \Phi(x))|.$$

Теорема 3. Если для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ выполнены условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_j(x|y) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x|y) = 1$$

для всех y и $j = 1, 2, \dots, n$, то для всех $n \geq 1$

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C_1 (\bar{v}_3/n)^{1/4},$$

если $\bar{v}_3 < \infty$ и C_1 — абсолютная константа.

Легко усмотреть, что $\bar{v}_3 < \infty$, если $\sup_{j \leq n} M|\xi_j|^3 < \infty$.

3. Теперь рассмотрим случай, когда $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины с функциями распределения $F_i(x)$, $x \in R_i$, $M\xi_i = 0$, $M\xi_i^2 = \sigma_i^2$. Пусть

$$\Phi_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-t^2/(2\sigma_i^2)} dt, \quad v_j = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 |d(F_j - \Phi_j)(x)|,$$

$$B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad Z_n = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\},$$

$$D_n^2 = \frac{1}{n} B_n^2, \quad V_n = \left(\sum_{i=1}^n v_i \right) / n, \quad W_n = \frac{V_n}{D_n^3}.$$

Нас будет интересовать оценка величины $\Delta_n = \sup_x |F_{Z_n}(x) - \Phi(x)|$ через псевдомоменты v_j . Пока единственная оценка такого типа принадлежит В. М. Золотареву ⁽⁴⁾ (а также получена в п. 1 другим методом) и имеет вид

$$\Delta_n \leq C_2 (W_n/\sqrt{n})^{1/4}.$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $v_i > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n'$, где

$$n' = \begin{cases} n, & \text{если все } v_i > 0, \\ n-1, & \text{если } v_n = 0. \end{cases}$$

Далее расположим ξ_i так, чтобы $\max_{i \leq j} \sigma_i^2 = \sigma_j^2, j = 1, 2, \dots, n'$, и введем следующие условия:

$$A1. \sigma_i \leq C_3 B_i^2, i = 4, \dots, n', C_3 < 1/3.$$

$$A2. \frac{v_i}{\sigma_j^2} \leq C_4 \left(\sum_{i=1}^{j+1} v_i \right) / B_{j-1}^2, i = 3, 4, \dots, n' - 1.$$

$$A3. v_i \leq C_5 V_n, i = 3, 4, \dots, n'.$$

Теорема 4. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ удовлетворяют условиям A1 — A3, то для всех $n \geq 1$

$$\Delta_n \leq C_6 \frac{1}{V_n} \max(W_n^{1/4}, W_n), \quad (*)$$

где C_6 зависит от C_3, C_4, C_5 .

Следствие I. Если $\xi_1, \dots, \xi_n$ можно перенумеровать так, чтобы одновременно выполнялись неравенства $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq \dots \leq \sigma_n^2, v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$, и условие A1, то имеет место (*) с C_6 , зависящей только от C_3 .

Следствие II. Если выполнено A1 и $v_j \leq v, j = 1, 2, \dots, n$, то

$$\Delta_n \leq C_7 \frac{1}{V_n} \max(\bar{W}_n^{1/4}, \bar{W}_n),$$

где $\bar{W}_n = v/D_n^2$, а C_7 зависит только от C_3 .

Автор приносит благодарность В. А. Статулявичусу за внимание к работе и обсуждение результатов.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило
15 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Bergström, Skand. Aktuarietidskrift, 1—2, 37 (1949). ² X. Бергстрем, Теория вероятн. и ее примен., 15, 3, 442 (1970). ³ V. V. Sazonov, Sankhya, Ser. A, 30, 2, 181 (1968). ⁴ В. М. Золотарев, Теория вероятн. и ее примен., 9, 3 (1965). ⁵ В. Паулаускас, Литовск. матем. сборн., 9, 2, 323 (1969). ⁶ В. Паулаускас, Там же, 9, 4, 791 (1969). ⁷ В. von Bahr, Arkiv Mat., 7, 5, 71 (1967).