

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

А. И. ПРИЛЕПКО

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 11 I 1971)

В работе рассматриваются проблемы существования решений обратных задач метагармонического потенциала переменной плотности для тела, близкого к данному $(^2, ^7, ^8)$, причем основное внимание уделяется тому, чтобы результаты представляли самостоятельный интерес для классических потенциалов и доказательства проводились в пространстве.

1°. Исследуются две обратные задачи.

Задача 1 (внешняя). Пусть дана область T с границей S класса $A^{(2, ^2)}$. Предположим, что на S заданы значения некоторой функции $H(x)$

$$H(x)|_S = f(x),$$

где $H(x)$ является решением метагармонического $(\kappa \geq 0)$ уравнения

$$\Delta H - \kappa^2 H = 0 \quad \text{для } x \in E^3 \setminus \bar{T}_0^*,$$

причем $\bar{T}_0^* \subset T$, $H(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Требуется найти такую область T_1 , чтобы для метагармонического потенциала $(\kappa \geq 0)$ $U(x; T_1, \mu)$ искомой области T_1 с известной плотностью μ имело место соотношение

$$H(x) = U(x; T_1, \mu) \quad \text{для } x \in E^3 \setminus \bar{T}_1.$$

Предполагается, что функция $f(x)$ «близка» к $g(x) = U(x; T, \mu)|_S$ — значениям метагармонического потенциала $\kappa \geq 0$ заданного тела T с плотностью μ , вычисленного на поверхности S , причем искомое тело T_1 ищется в классе «близких» к данному T $(^2, ^7)$ (см. также $(^3, ^{6-8})$, где рассмотрены вопросы единственности и устойчивости подобной задачи).

Если для односвязных тел при $\kappa \geq 0$ решение задачи 1 существует и единственно $(^7)$, то в случае многосвязных тел имеет место иное утверждение:

Пусть T — многосвязная область. Тогда при $\kappa > 0$ решение задачи 1 существует и единственно, а при $\kappa = 0$ решение задачи 1, вообще говоря, не единственно и определяется уравнением разветвлений.

Отметим, что внешняя задача для многосвязных тел, «близких» к данному, аналогична, в некотором смысле, внутренней обратной задаче для односвязных тел, «близких» к данному. Поэтому более полные выводы по задаче 1 для многосвязных тел подобны теоремам 1 и 2 в п. 2°.

Задача 2 (внутренняя) ставится аналогично задаче 1, причем $H(x)$ является решением неоднородного метагармонического уравнения в конечной области $G_0 \supset \bar{T}$:

$$\Delta H - \kappa^2 H = -\mu(x), \quad x \in G_0 \quad (\kappa = \text{const} \geq 0). \quad (1)$$

Тело T_1 ищется такое, что

$$\text{grad } H(x) = \text{grad } U(x; T_1, \mu) \quad \text{для } x \in T_1.$$

В случае $\kappa = 0$, $\mu = \text{const}$ существование решений этой задачи исследовалось ранее для частных случаев эллипсоидальных тел в связи с задачами небесной механики (¹⁰⁻¹²). В данной работе задача 2 исследована для $\kappa \geq 0$ в общем случае, когда T — произвольная односвязная область, μ — аналитическая функция в G_0 , $\mu(x)|_S \neq 0$; причем при $\kappa > 0$ доказано существование и единственность решения задачи, а при $\kappa = 0$ доказано существование решения, а число областей определяется уравнением разветвлений, зависящим от одного вещественного параметра. Приведем более полные выводы по задаче 2.

2°. Пусть T — односвязная область с границей S класса $A^{(2, \lambda)}$; $U(x; T, \mu)$ — объемный метагармонический ($\kappa \geq 0$) потенциал тела T заданной переменной плотности μ .

Рассмотрим односвязную область G_0 , $G_0 \supset T + S$, граница ΓG_0 области G_0 находится на положительном расстоянии d от поверхности S . Пусть известен $\text{grad } U(x; T, \mu)$ — градиент метагармонического потенциала для $x \in T + S$. Кроме того, предполагается, что заданная функция $H(x)$ является регулярным решением уравнения (1).

Дополнительно будем предполагать, что: 1) $\mu(x)$ есть действительная аналитическая функция в области G_0 , причем всюду на поверхности S функция $\mu(x)$ отлична от нуля; 2) каждая из величин

$$\|\partial H / \partial v - \partial U(T, \mu) / \partial v\|, \quad \|\partial^2 H / \partial v^2 - \partial^2 U(T, \mu) / \partial v^2\| \quad (2)$$

не превышает ωC , где $0 < \omega < d$, $C = C(T)$, $\omega = \omega(T, \mu, \epsilon_0, d)$, норма $\|\cdot\|$ предельных значений на S изнутри

$$\frac{\partial}{\partial v} (H - U(T, \mu)) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial v^2} (H - U(T, \mu))$$

определяется, как в (⁷) для пространства R_2 .

Пусть $\{S_i\}$ — класс поверхностей, уравнение которых в криволинейной системе координат (см. (⁷))

$$y = x + vn, \quad (3)$$

имеет вид

$$\{v = \zeta(\xi, \eta)\}, \quad |v| < \epsilon_0, \quad \zeta \in C^{(1, \lambda)}(S). \quad (4)$$

При этих условиях имеют место следующие утверждения.

Теорема 1 (случай $\kappa > 0$). Существует и притом единственная поверхность S_1 , ограничивающая тело T_1 , удовлетворяющая условию $\|\zeta'\| < d$, такая, что градиент внутреннего объемного метагармонического ($\kappa > 0$) потенциала $U(x; T_1, \mu)$ тела T_1 заданной плотности μ равен градиенту заданной функции H в области T_1 , т. е.

$$\text{grad } H(x) = \text{grad}_x \int_T \mu(y) \frac{e^{-\kappa r_{xy}}}{r_{xy}} dy \quad \text{для } x \in T_1, \quad (5)$$

где $H(x)$ — регулярное решение уравнения (1).

Теорема 2 (случай $\kappa = 0$). Существует тело T_1^i , ограниченное поверхностью S_1^i класса (3) — (4), удовлетворяющей условиям $\|\zeta'\| < d$, такое, что градиент заданной функции $H(x)$ из (1) равен внутри T_1^i градиенту внутреннего ньютонового потенциала $U(x; T_1^i, \mu)$ тела T_1^i заданной плотности μ , т. е.

$$\text{grad } H(x) = \text{grad}_x \int_{T_1^i} \mu(y) \frac{1}{r_{xy}} dy \quad \text{для } x \in T_1^i, \quad (6)$$

где $H(x)$ — регулярное решение уравнения (1) ($\kappa = 0$).

Число l поверхностей S_1^l совпадает с числом решений относительно l уравнения разветвлений

$$L_0 + (L_1 - 1)l + L_2 l^2 + \dots + L_n l^n + \dots = 0, \quad (7)$$

где L_k ($k = 0, 1, \dots$) — вполне заданные числа.

3°. Для функции $\zeta(\xi, \eta)$, определяющей границу искомого тела, подобно тому как это делается в (7), выводится нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$B(\zeta, \mu) = \frac{\partial H}{\partial v} \Big|_{v=\zeta} - \frac{\partial}{\partial v} U(T, \mu) \Big|_{v=0} - \zeta(x) \frac{\partial^2 U(T, \mu)}{\partial v^2} \Big|_{v=0} - \chi(\zeta), \quad (8)$$

где $\chi(\zeta)$ — интегро-дифференциальный оператор, подобный оператору $\mathcal{C}$ из (7), $B(\varphi)$ — фредгольмовый оператор.

Доказывается, что для оператора $\chi(\zeta)$ справедливы оценки, подобные доказанным в теореме 3 работы автора (7), а $B(\varphi)$ обладает тем свойством, что уравнение

$$B(\varphi) = 0$$

имеет единственное нетривиальное решение $\varphi = \text{const}$ для случая $\kappa = 0$ и только тривиальное решение $\varphi = 0$ в случае $\kappa > 0$. Из свойств правой части уравнения (8), а также свойств оператора B следуют теоремы 1 и 2.

Отметим, что решение уравнений разветвлений (7) в зависимости от коэффициентов L_k ($k = 0, 1, \dots$) в различных частных случаях изучалось в ряде работ по теории фигур равновесия вращающейся жидкости (см. (4, 5)) в настоящее время уравнение разветвлений изучено в общем случае с помощью диаграммы Ньютона (см. (1)).

Из исследования поставленной задачи 2 и решения уравнения (8) вытекает

Следствие. В утверждениях теоремы 1 и 2 вместо равенств (5) и (6) можно записать соответственно равенство

$$H(x) = \int_{T_1^i} \mu(y) \frac{e^{-\kappa r_{xy}}}{r_{xy}} dy \quad \text{для } x \in T_1 \quad (\kappa > 0),$$

$$H(x) = \int_{T_1^i} \mu(y) \frac{1}{r_{xy}} dy + C_1^i \quad \text{для } x \in T_1^i \quad (\kappa = 0),$$

где $C_1^i = \text{const}$, T_1^i — область, ограниченная поверхностью S_1^i , которая определяется решением уравнений (7), (8).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
30 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969. ² В. К. Иванов, Изв. АН СССР, сер. матем., 20, 793 (1956). ³ М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962. ⁴ Л. Лихтенштейн, Фигуры равновесия вращающейся жидкости, М., 1966. ⁵ А. М. Ляпунов, Собр. соч., 5, 1965. ⁶ П. С. Новиков, ДАН, 18, № 3, 165 (1938). ⁷ А. И. Прилепко, а) Сибирск. матем. журн., 6, № 6, 1332 (1965); б) ДАН, 185, № 1, 40 (1969). ⁸ Л. Н. Сретенский, Изв. АН СССР, сер. матем., 2, 551 (1938). ⁹ А. Н. Тихонов, ДАН, 39, 195 (1943). ¹⁰ P. Dive, Bull. Soc. Math. France, 31 (1931). ¹¹ E. Hölder, Math. Zs., 35, 632 (1932). ¹² W. Niklibork, Math. Zs., 35, 625 (1932).