

В. В. СТРИГИН

**«СМЕНА УСТОЙЧИВОСТЕЙ» И БИФУРКАЦИЯ МАЛЫХ
АВТОКОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 8 I 1971)

1. Многие вопросы механики, радиофизики, теории автоматического регулирования тесно связаны с задачей о рождении малых автоколебаний. Первые результаты в решении этой задачи принадлежат А. А. Андронову и Е. А. Леонтович (см. например, ⁽¹⁾), которые изучили рождение малых автоколебаний из особой точки типа фокуса. В их работах рассматривалась двумерная система

$$dx/dt = A(\varepsilon)x + B(x, \varepsilon), \quad (1)$$

где x — двумерный вектор, A — квадратная матрица второго порядка, а $B(x, \varepsilon)$ — члены, имеющие второй порядок малости. Предполагалось, что при $\varepsilon = 0$ матрица $A(0)$ имеет пару чисто мнимых корней и нулевое решение при $\varepsilon = 0$ асимптотически устойчиво. Если при $\varepsilon > 0$ нулевое решение неустойчиво, то рождается малое автоколебание.

В докладе ⁽²⁾ А. А. Андронов поставил задачу исследовать вопрос о бифуркации и «смене устойчивости» между стационарными движениями для систем более высокого порядка. Определенное продвижение в этом вопросе получено в работах горьковских математиков ⁽³⁻⁵⁾. Особо следует отметить статью Н. Н. Брушлинской ⁽⁶⁾, в которой дается весьма полное описание качественной картины окрестности нуля n -мерной системы при бифуркации автоколебаний. Совсем недавно Н. Чефи ⁽⁷⁾ установил достаточно общую теорему о рождении автоколебания из нулевого состояния равновесия и изучил структуру окрестности нуля. Отметим, что связь бифуркации с устойчивостью отмечал также Ю. С. Колесов при исследовании автоколебаний генераторов с распределенными параметрами.

Развитые в этой работе методы позволяют изучить более общую, чем в ^(6, 7) задачу о «смене устойчивостей» и бифуркации систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных; такая задача возникает, например, в теории автоматического регулирования (см. ⁽⁸⁾).

2. Пусть R^n и R^m — n -мерное и m -мерное евклидовы пространства, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в пространстве R^n , $\|\cdot\|$ — норма в R^n и R^m . Обозначим через $B^n(r)$ и $B^m(r)$ шары

$$B^n(r) = \{x \in R^n: \|x\| < r\}, \quad B^m(r) = \{y \in R^m: \|y\| < r\}$$

в этих пространствах.

Рассмотрим теперь систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon dy/dt = g(x, y, \varepsilon), \quad x \in R^n, \quad y \in R^m, \quad (2)$$

где $f(x, y, \varepsilon)$ и $g(x, y, \varepsilon)$ — функции, определенные в области $B^n(r) \times B^m(r) \times [0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$) и принимающие значения в R^n и R^m соответственно. Предположим дополнительно, что выполнены следующие шесть условий:

1°. $f(0, 0, \varepsilon) \equiv 0$, $g(0, 0, \varepsilon) \equiv 0$ при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

2°. Функции f и g бесконечно дифференцируемы по x, y при $\varepsilon > 0$ и аналитичны по x, y при $\varepsilon = 0$; более того, f и g вместе со всеми их част-

ными производными по x, y непрерывно дифференцируемы по ε в точке $\varepsilon = 0$.

3°. Характеристические корни матрицы $g_v(0, 0, 0)$ лежат в левой комплексной полуплоскости.

4°. У матрицы

$$A_0 = f_x(0, 0, 0) - f_y(0, 0, 0) g_v^{-1}(0, 0, 0) g_x(0, 0, 0)$$

есть пара чисто мнимых корней $\pm i\omega$ ($\omega > 0$) характеристического уравнения; остальные корни этого уравнения лежат в левой комплексной полуплоскости.

Пусть $\varphi(x)$ — решение уравнения $g(x, y, 0) = 0$, обращающееся в нуль при $x = 0$.

5°. Нулевое положение равновесия системы

$$dx/dt = f[x, \varphi(x), 0] \quad (3)$$

либо асимптотически устойчиво по Ляпунову, либо неустойчиво.

Через e_1 и e_2 обозначим векторы из R^n , для которых

$$A_0 e_1 = -\omega e_2, \quad A_0 e_2 = \omega e_1.$$

Пусть h_1 и h_2 — такие линейные функционалы над R^n , что $h_i(e_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) и

$$A_0^* h_1 = \omega h_2, \quad A_0^* h_2 = -\omega h_1.$$

6°. $a_1 = (h_1, A_1 e_1) \neq 0$, где

$$A_1 = \int_0^{2\pi/\omega} e^{A_0[2\pi/\omega - \tau]} \{ f_y(0, 0, 0) g_v^{-1}(0, 0, 0) g_x(0, 0, 0) f_x(0, 0, 0) - \\ - [f_y(0, 0, 0) g_v^{-1}(0, 0, 0) g_x(0, 0, 0)]^2 - f_{xx}(0, 0, 0) + f_{yx}(0, 0, 0) \times \\ \times g_v^{-1}(0, 0, 0) g_x(0, 0, 0) + f_y(0, 0, 0) g_v^{-1}(0, 0, 0) g_{xx}(0, 0, 0) + \\ + f_y(0, 0, 0) g_v^{-1}(0, 0, 0) g_{yx}(0, 0, 0) g_v^{-1}(0, 0, 0) g_x(0, 0, 0) \} e^{A_0 \tau} d\tau.$$

Говорят, что при $\varepsilon = 0$ имеет место бифуркация малых автоколебаний, если при малых $\varepsilon > 0$ у системы (2) существует ненулевое автоколебание, стремящееся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, период которого стремится к $2\pi/\omega$.

Будем говорить, что при $\varepsilon = 0$ происходит «смена устойчивостей» нулевого положения равновесия, если при $\varepsilon = 0$ нулевое положение равновесия системы (3) асимптотически устойчиво (неустойчиво), в то время как при $\varepsilon > 0$ нулевое положение равновесия системы (2) неустойчиво (асимптотически устойчиво).

Теорема 1. Для того чтобы при $\varepsilon = 0$ имела место бифуркация малых автоколебаний у системы (2), необходимо и достаточно, чтобы при $\varepsilon = 0$ происходила «смена устойчивостей» нулевого положения равновесия.

Теорема 2. Пусть при $\varepsilon = 0$ происходит «смена устойчивостей» нулевого положения равновесия.

Тогда рождается ровно одно автоколебание. Это автоколебание асимптотически устойчиво, если асимптотически устойчивое нулевое положение равновесия системы (3) при $\varepsilon = 0$ переходит в неустойчивое нулевое положение равновесия системы (2) при $\varepsilon > 0$.

Если же неустойчивое нулевое положение равновесия системы (3) при $\varepsilon = 0$ переходит в асимптотически устойчивое нулевое положение равновесия системы (2) при $\varepsilon > 0$, то это автоколебание неустойчиво.

3. Автоколебание, существование которого устанавливается в теореме 1, с достаточной степенью точности может быть вычислено приближенно.

Обозначим через $U(t, x_0)$ оператор сдвига по траекториям системы (3) за время t . Очевидно,

$$U(t, x_0) = V_1(t)x_0 + V_2(t, x_0),$$

где $V_1(t) = e^{At}$, а $V_2(t, x_0)$ — члены второго порядка малости по x_0 . Пусть, далее, $R = \{x \in \mathbb{R}^n: h_2(x) = 0\}$, $R_0 = \{x \in R: h_1(x) = 0\}$ и $Qx = x - h_1(x)e_1$. Оператор Q проектирует R в R_0 . Обозначим через $l(\xi, \zeta)$ ($\xi \geq 0, \zeta \in R_0, \|\zeta\| < r_0$) решение уравнения

$$\sin \omega l = \xi^{-1} h_2(V_2[2\pi/\omega + l, \xi e_1 + \xi \zeta]),$$

которое обращается в нуль при $\xi = 0, \zeta = 0$.

Пусть, наконец, $\zeta = p(\xi)$ ($0 \leq \xi \leq \xi_0$) — решение операторного уравнения

$$\zeta = \xi^{-1} Q U(2\pi/\omega + l(\xi, \zeta), \xi e_1 + \xi \zeta), \quad \zeta \in R_0,$$

обращающееся в нуль при $\xi = 0$. Нетрудно показать, что функция

$$\eta(\xi) = (h_1, U[2\pi/\omega + l(\xi, p(\xi)), \xi e_1 + \xi p(\xi)])$$

имеет вид

$$\eta(\xi) = \xi + \alpha_0 \xi^{m_0} + o(\xi^{m_0}),$$

где $\alpha_0 \neq 0$, а m_0 — положительное целое число ≥ 2 .

Теорема 3. Начальное условие (x_0, y_0) малого автоколебания, существование которого установлено в теореме 1, представимо в виде

$$x_0 = \beta_0 \varepsilon^{1/(m_0-1)} e_1 + o(\varepsilon^{1/(m_0-1)}),$$

$$y_0 = \beta_0 \varepsilon^{1/(m_0-1)} g_v^{-1}(0, 0, 0) g_x(0, 0, 0) e_1 + o(\varepsilon^{1/(m_0-1)}),$$

где $\beta_0 = (-a_1/a_0)^{1/(m_0-1)}$.

Используя эти формулы и разложения А. Б. Васильевой⁽⁹⁾, можно получить различные приближения малого автоколебания.

Для доказательства теорем 1, 2, 3 применяется метод Пуанкаре и результаты А. Н. Тихонова⁽¹⁰⁾, Л. Флатто и Н. Левинсона⁽¹¹⁾, М. А. Красносельского⁽¹²⁾ и Ю. С. Колесова⁽¹³⁾.

Автор выражает искреннюю признательность Ю. С. Колесову за ценные советы и М. А. Красносельскому и В. М. Волосову за внимание к работе.

Поступило
23 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, Собрание тр. А. А. Андропова, 1956, стр. 188. ² А. А. Андронов, Математические проблемы теории колебаний, I Всесоюз. конф. по колебаниям, М.—Л., 1933. ³ Ю. И. Неймарк, Изв. Высш. учебн. зав., Радиофизика, 1 (1958). ⁴ Ю. И. Неймарк, ДАН, 129, № 4 (1959). ⁵ Л. О. Барсук, Н. М. Белослудцев и др., Изв. Высш. учебн. зав., Радиофизика, 11, № 11 (1968). ⁶ Н. Н. Брушлинская, ДАН, 139, № 1 (1961). ⁷ N. Chafee, Diff. Equ., 4, 1968. ⁸ Б. В. Булгаков, Колебания, М., 1954, стр. 790. ⁹ А. Б. Васильев, Матем. сборн., 50, в. 1, 43 (1960). ¹⁰ А. Н. Тихонов, Матем. сборн., 22, № 2, 193 (1948). ¹¹ Л. Флатто, Н. Левинсон, Сборн. пер., Математика, 2, № 2, 61 (1958). ¹² М. А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, М., 1962, стр. 157. ¹³ Ю. С. Колесов, Изв. АН СССР, 33, в. 6, 1356 (1969).