Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 6

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

В. Г. КРАВЧЕНКО

К ТЕОРИИ НЁТЕРА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕКАРЛЕМАНОВСКИМ СДВИГОМ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 27 V 1971)

1. Пусть L — простой замкнутый контур Ляпунова и $\alpha(t)$ — гомеоморфизм L на себя. В пространстве $H(\lambda)$ гёльдеровских функций рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$T = a(t)I + b(t)B_\alpha + c(t)S + d(t)B_\alpha S + D, \tag{1}$$

где I — тождественный оператор, D — вполне непрерывный,

$$B_\alpha \varphi(t) = \varphi[\alpha(t)], \qquad S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,d\tau}{\tau - t}.$$

Множество сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $\alpha(t)$ на себя подразделяется на три типа:

I. Существует целое число $m > 1$ такое, что $\alpha_m(t) \equiv t$, где $\alpha_m(t) = \alpha[\alpha_{m-1}(t)]$, $\alpha_0(t) \equiv t$ (сдвиг Карлемана).

II. Для любой точки $t \in L$ итерационная последовательность $\{\alpha_n(t)\}$ имеет точно m предельных точек и существует хотя бы одна точка $t_0 \in L$ такая, что $\alpha_n(t_0) \neq t_0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$

III. Для любой точки $t \in L$ предельные точки итерационной последовательности $\{\alpha_n(t)\}$ образуют совершенное множество.

Теория Нётера оператора (1) построена в работах Г. С. Литвинчука ([1], [2]) только для случая, когда $\alpha(t)$ является сдвигом Карлемана. Метод работ ([1], [2]) неприменим для остальных типов гомеоморфизмов контура L.

В настоящей статье найдены условия нётеровости и вычислен индекс оператора (1) с гомеоморфизмом $\alpha(t)$, удовлетворяющим II. Такие гомеоморфизмы обязательно имеют неподвижные точки, кратность * каждой из которых равна m. Будем предполагать, что их конечное число: $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$, $1 \leqslant l \leqslant \infty$. Кроме того, не нарушая общности, считаем, что нумерация точек τ_j произведена таким образом, чтобы контур L разбивался ими на l непересекающихся дуг: $L_1 = (\tau_1, \tau_2)$, $L_2 = (\tau_2, \tau_3), \ldots, L_l = (\tau_l, \tau_1)$.

2. Сначала в пространстве $C(L)$ непрерывных функций на L рассмотрим оператор $A = a(t)I + b(t)B_\alpha$. Обозначим

$$\delta(t) = \left|\prod_{i=0}^{m-1} a[\alpha_i(t)]\right| - \left|\prod_{i=0}^{m-1} b[\alpha_i(t)]\right|.$$

Теорема 1. *Если $a(t), b(t) \in C(L)$, при всех τ_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, и при всех $t \in L$ выполняется хотя бы одно из неравенств*

1) $|a(t)| \cdot \delta(\tau_j) > 0$,

2) $|b(t)| \cdot \delta(\tau_j) < 0$,

то оператор A непрерывно обратим в пространстве $C(L)$.

---

* Точка $\tau \in L$ называется неподвижной точкой кратности m, если $\alpha_m(\tau) = \tau$ и $\alpha_i(\tau) \neq \tau$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Идея доказательства заключается в том, чтобы свести изучение оператора A к изучению операторов $A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \tilde{a}[\beta_k(t)] \cdot I + \prod_{k=0}^{n-1} \tilde{b}[\beta_k(t)] B_\alpha$, где $\beta(t) = \alpha_m(t)$, $\tilde{a}(t) = \prod_{i=0}^{m-1} a[\alpha_i(t)]$ и $\tilde{b}(t) = \prod_{i=0}^{m-1} b[\alpha_i(t)]$. Затем, используя свойства итерационной последовательности $\{\beta_k(t)\}$, находим, что при достаточно больших n все операторы A_n непрерывно обратимы. Отсюда и будет следовать утверждение теоремы.

3. Предполагая, что существует гёльдеровская $\alpha'(t)$, всюду на L отличная от нуля, рассмотрим оператор A в пространстве $H(\lambda)$. Обозначим

$$m_j = \min\{1, |\alpha_m'(\tau_j)|\}, \quad M_j = \max\{1, |\alpha_m'(\tau_j)|\},$$

$$\Delta(t,\lambda) = \left|\prod_{i=0}^{m-1} a[\alpha_i(t)]\right| - [(1-\lambda)m_j + \lambda M_j]\left|\prod_{i=0}^{m-1} b[\alpha_i(t)]\right|, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Теорема 2. *Если $a(t)$, $b(t) \in H(\lambda)$, при всех τ_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, при всех $t \in L$ и при всех $\lambda \in [0, 1]$ выполняется хотя бы одно из неравенств*

1) $|a(t)| \cdot \Delta(\tau_j, \lambda) > 0$,

2) $|b(t)| \cdot \Delta(\tau_j, \lambda) < 0$,

то оператор A непрерывно обратим в $H(\lambda)$.

Из теоремы 1 следует существование обратного оператора A^{-1}. Доказательство того, что A^{-1} непрерывен в $H(\lambda)$, основано на формулируемой лемме.

Лемма 1. *Если $p \cdot M_j < 1$, то для всех t, $\tau \in \bar{L}_j$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k \frac{|\alpha_{km}(t) - \alpha_{km}(\tau)|^\lambda}{|t-\tau|^\lambda} \leqslant C(p,\lambda) < \infty,$$

где $C(p,\lambda)$ — постоянная, зависящая только от P и λ.

4. Следующая лемма справедлива для любого типа гомеоморфизмов I — III.

Лемма 2. *Пусть $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию контура L, тогда оператор T нётеров, если нётеровы операторы*

$$C_1 = [a(t) + c(t)] \cdot I + [b(t) + d(t)] B_\alpha,$$
$$C_2 = [a(t) - c(t)] \cdot I + [b(t) - d(t)] B_\alpha.$$

В самом деле, имеют место равенства

$$T = {}^1\!/_2 C_1(I+S) + {}^1\!/_2 C_2(I-S), \tag{2}$$
$$C_1(I+S) = (I+S)C_1 + D_1, \tag{3}$$
$$C_2(I-S) = (I-S)C_2 + D_2, \tag{4}$$

D_i — (здесь и ниже) вполне непрерывные операторы. Из нётеровости операторов C_1 и C_2 следует ([3]) существование операторов $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ таких, что

$$C_1 \cdot \tilde{C}_1 = I + D_3, \quad \tilde{C}_1 \cdot C_1 = I + D_4, \quad C_2 \cdot \tilde{C}_2 = I + D_5,$$
$$\tilde{C}_2 \cdot C_2 = I + D_6.$$

Поэтому из (3), учитывая (4) и (5), получим

$${}^1\!/_2[\tilde{C}_1(I+S) + \tilde{C}_2(I-S)] \cdot T = I + D_7,$$
$$T \cdot {}^1\!/_2[(I+S)\tilde{C}_1 + (I-S)\tilde{C}_2] = I + D_8,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Обозначим

$$\Delta_1(t,\lambda)=$$
$$=\left|\prod_{i=0}^{m-1}(a[\alpha_i(t)]+c[\alpha_i(t)])\right|-[(1-\lambda)m_j+\lambda M_j]\cdot\left|\prod_{i=0}^{m-1}(b[\alpha_i(t)]+d[\alpha_i(t)])\right|,$$
$$\Delta_2(t,\lambda)=$$
$$=\left|\prod_{i=0}^{m-1}(a[\alpha_i(t)]-c[\alpha_i(t)])\right|-[(1-\lambda)m_j+\lambda M_j]\cdot\left|\prod_{i=0}^{m-1}(b[\alpha_i(t)]-d[\alpha_i(t)])\right|.$$

Теорема 3. *Если* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)\in H(\lambda)$, *при всех* τ_j, $j=1, 2, \ldots, l$, *при всех* $t\in L$ *и при всех* $\lambda\in[0, 1]$ *выполняется хотя бы одно из условий*

А) $|a(t)+c(t)|\cdot|a(t)-c(t)|>0$, $\Delta_1(\tau_j,\lambda)>0$, $\Delta_2(\tau_j,\lambda)>0$;
Б) $|b(t)+d(t)|\cdot|b(t)-d(t)|>0$, $\Delta_1(\tau_j,\lambda)<0$, $\Delta_2(\tau_j,\lambda)<0$;
В) $|a(t)-c(t)|\cdot|b(t)+d(t)|>0$, $\Delta_1(\tau_j,\lambda)<0$, $\Delta_2(\tau_j,\lambda)>0$;
Г) $|a(t)+c(t)|\cdot|b(t)-d(t)|>0$, $\Delta_1(\tau_j,\lambda)>0$, $\Delta_2(\tau_j,\lambda)<0$,

то оператор T *нётеров в* $H(\lambda)$; *причем индекс оператора* T *вычисляется по формулам*

А) $\operatorname{Ind} T=\operatorname{Ind}\frac{a(t)-c(t)}{a(t)+c(t)}$; Б) $\operatorname{Ind} T=\operatorname{Ind}\frac{b(t)-d(t)}{b(t)+d(t)}$;
В) $\operatorname{Ind} T=\operatorname{Ind}\frac{a(t)-c(t)}{b(t)+d(t)}$; Г) $\operatorname{Ind} T=\operatorname{Ind}\frac{b(t)-d(t)}{a(t)+c(t)}$.

Условия нётеровости непосредственно следуют из леммы 2 и теоремы 2.
Найдем индекс оператора T в случае А). Операторы

$$T_\mu=a(t)I+\mu b(t)B_\alpha+c(t)S+\mu d(t)B_\alpha S$$

в силу условия А) нётеровы при всех $\mu\in[0, 1]$. Следовательно ([3-5]),

$$\operatorname{Ind} T=\operatorname{Ind} T_1=\operatorname{Ind} T_0=\operatorname{Ind}\frac{a(t)-c(t)}{a(t)+c(t)}.$$

В случае В) полагаем

$$T_\mu={}^1/_2\{[(1+\mu)a(t)-(1-\mu)c(t)]\cdot I+[(1+\mu)b(t)+$$
$$+(1-\mu)d(t)]B_\alpha+[(-1+\mu)a(t)+(1+\mu)c(t)]S+$$
$$+[(1-\mu)b(t)+(1+\mu)d(t)]\}B_\alpha S.$$

По-прежнему, $\operatorname{Ind} T=\operatorname{Ind} T_0$ и на основании ([6])

$$\operatorname{Ind} T=\operatorname{Ind}\frac{a(t)-c(t)}{b(t)+d(t)}.$$

Случаи Б) и Г) рассматриваются аналогично случаям А) и В).

5. Пусть $\alpha(t)$ изменяет ориентацию контура L. Тогда $\alpha_2(t)$ сохраняет ориентацию и имеет неподвижные точки только первой кратности. Число таких точек $l\geqslant 2$. Будем предполагать, что $l<\infty$.

Обозначим $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ — неподвижные точки $\alpha_2(t)$,

$$\widetilde{m}_j=\min\{1, |\alpha_2'(\tau_j)|\},\quad \widetilde{M}_j=\max\{1, |\alpha_2'(\tau_j)|\},$$
$$\widetilde{\Delta}_1(t, \lambda)=|a(t)+c(t)|\cdot a[\alpha(t)]-c[\alpha(t)]-[(1-\lambda)\widetilde{m}_j+\lambda\widetilde{M}_j]\times$$
$$\times b(t)-d(t)||b[\alpha(t)]+d[\alpha(t)]|,$$
$$\widetilde{\Delta}_2(t, \lambda)=|a(t)-c(t)||a[\alpha(t)]+c[\alpha(t)]|-[(1-\lambda)\widetilde{m}_j+$$
$$+\lambda\widetilde{M}_j]|b(t)+d(t)||b[a(t)]-d[\alpha(t)]|.$$

Теорема 4. *Если* $\alpha(t)$ *изменяет ориентацию контура* L, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t) \in H(\lambda)$, *при всех* τ_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, *при всех* $t \in L$ *и при всех* $\lambda \in [0, 1]$ *выполняется хотя бы одно из условий*

А*) $|a^2(t) - c^2(t)| > 0, \quad \tilde{\Delta}_1(\tau_j, \lambda) > 0, \quad \tilde{\Delta}_2(\tau_j, \lambda) > 0;$

Б*) $|b^2(t) - d^2(t)| > 0, \quad \tilde{\Delta}_1(\tau_j, \lambda) < 0, \quad \tilde{\Delta}_2(\tau_j, \lambda) < 0,$

то оператор T — *нётеров в* $H(\lambda)$; *причем индекс оператора* T *вычисляется по формулам*

$$\text{А}^*)\quad \operatorname{Ind} T = \operatorname{Ind}\frac{a(t) - c(t)}{a(t) + c(t)}, \qquad \text{Б}^*)\ \operatorname{Ind} T = \operatorname{Ind}\frac{b(t) - d(t)}{b(t) + d(t)}.$$

Пусть $\alpha_{-1}(t)$ — функция, обратная к $\alpha(t)$, и

$$K_1 = -a[\alpha_{-1}(t)]I + b(t)B_\alpha + c[\alpha_{-1}(t)]S + d(t)B_\alpha S,$$
$$K_2 = -a[\alpha(t)]I + b(t)B_\alpha + c[\alpha(t)]S + d(t)B_\alpha S.$$

Тогда произведения $T \cdot k_1$ и $k_2 \cdot T$ отличаются от операторов вида

$$\tilde{K}_i = a_i(t)I + b_i(t)B_\alpha^2 + C_i(t)S + d_i(t)B_\alpha^2 S, \quad i = 1,2,$$

на вполне непрерывный оператор. Но если T удовлетворяет А* (Б*), то операторы $\tilde{K}_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию А (Б) теоремы 3. Поэтому ([3]) T — нётеров оператор. Аналогично предыдущему вычисляем индекс.

В заключение выражаю глубокую благодарность Г. С. Литвинчуку за руководство работой.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
10 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. С. Литвинчук, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, 563 (1967). [2] Г. С. Литвинчук, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1414 (1968). [3] Ф. В. Аткинсон, Матем. сборн., 28 (70), 1 (1951). [4] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. [5] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. [6] Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, «Наука», 1970.