Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 6

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Н. В. КРЫЛОВ

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 V 1971)

В этой работе приводятся теоремы типа принципа максимума для нелинейных, вообще говоря, вырождающихся элллиптических уравнений в классе функций W_p^2 (теоремы 1, 2), а также формулируются теорема 3 о существовании решения таких уравнений и теорема 4 о переходе к пределу в нелинейном операторе.

Метод доказательства теорем 1, 2 по существу совпадает с методом доказательства принципа максимума в классе C_2, изложенным в ([1]), гл. 1, § 1. Он основан на получении принципа максимума для линейных уравнений, который, в свою очередь, выводится из оценки, аналогичной известным оценкам А. Д. Александрова ([2, 3]). Доказательства упомянутой оценки и теоремы 3 проводятся с использованием теории управляемых случайных процессов, теоремы 4 — с помощью минимаксного представления нелинейного оператора ([4]).

Всюду ниже E — n-мерное эвклидово пространство, G — ограниченная область в E, Γ — граница G, число $p > n$, u, $v \in W^2_{p,\mathrm{loc}}(G)$, u, v непрерывны в $G \cup \Gamma$. Относительно функций $F(x, u_{ij}, u_i, u)$ (с индексами или без них) будет предполагаться, что $F(x, u_{ij}, u_i, u) = F(x, u_{ji}, u_i, u)$, F измерима по $x \in G$ при любых u_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$, u_i $(i = 1, ..., n)$, u, F непрерывно дифференцируема по (u_{ij}, u_i, u) при всяком $x \in G$. Положим $a = (F_{u_{ij}})^n_{i,j=1}$, $b = (F_{u_1}, \ldots, F_{u_n})$, $c = -F_u$, для $w \in W^2_{p,\mathrm{loc}}(G)$

$$F[w](x) = F(x, w_{x_ix_j}, w_{x_i}, w), a[w](x) = a(x, w_{x_ix_j}, w_{x_i}, w)$$

для $t \in [0, 1]$, $a_t(x) = a[tu + (1-t)v](x)$. Аналогично по b и c введем $b_t(x)$, $c_t(x)$ и будем снабжать a, b, c, a_t, b_t, c_t теми же индексами, которыми будет обладать F.

Теорема 1. *Пусть $F[u] \geqslant G[v]$ (п.в.) в G. Предположим, что существует постоянная $N < \infty$, функция $g \geqslant 0$, $g \in L_n(G)$ и векторы $k_t(x)$, $h_t(x)$ такие, что при всех $t \in [0, 1]$ и при почти всех $x \in G$* а) $b_t = k_t + \sqrt{a}h_t$, $|h_t|^2 \leqslant Nc_t$, $|k_t|^n \leqslant g^n \det a_t$. *Пусть еще* б) $a_t \geqslant 0$, $c_t \geqslant 0$, в) $c_t + \operatorname{tr} a_t > 0$ *(п.в.) при* $t \in [0, 1]$.

Тогда $u - v \leqslant \max [u(x) - v(x) \colon x \in \Gamma]$ в G.

Из этой теоремы следует, например, что если в области G справедлива теорема Соболева о вложении $W_p^2(G)$ в $C^1(G)$, то уравнение

$$F[u] \equiv \det(u_{x_ix_j} - u_{x_i}u_{x_j} - \delta_{ij}u)^n_{i,j=1} = f \tag{1}$$

при $f > 0$ (п.в.) в G может иметь только одно решение из $W_p^2(G)$, для которого матрица $d[u] = (u_{x_ix_j} - u_{x_i}u_{x_j} - \delta_{ij}u) \geqslant 0$ и которое на Γ равно фиксированной непрерывной функции. Действительно, если есть две такие функции u и v, то $d_t \equiv d[tu + (1-t)v] > 0$ и $a_t = d_t^{-1} \det d_t$. Далее, $c_t = \operatorname{tr} a_t$, $b_t = -2a_t(tDu + (1-t)Dv)$ *, поэтому можно взять $g =$

* $Dv = \operatorname{grad} v$, ниже $D^2v = (v_{x_ix_j})^n_{i,j=1}$.

$= 0$, $k_t = 0$ и тогда

$$c_t^{-1} |h_t|^2 = 4 (\operatorname{tr} a_t)^{-1} (a_t (tDu + (1-t) Dv), (tDu + (1-t) Dv)).$$

Последнее же ограничено, поскольку $|Du|$ и $|Dv|$ ограничены в G. Значит, предположения теоремы 1 выполнены и $u = v$ в G, если $u = v$ на Γ.

Интересно, что если вместо (1) рассмотреть уравнение

$$\det (u_{x_i x_j} + u_{x_i} u_{x_j} - \delta_{ij} u)_{i,j=1}^n = f \tag{2}$$

и решать (2) в классе функций, для которых $\bar{d}[u] = (u_{x_i x_j} + u_{x_i} u_{x_j} - \delta_{ij} u) \geqslant 0$, то применить теорему 1 уже невозможно, поскольку из $\bar{d}[u] \geqslant 0$, $\bar{d}[u] \geqslant 0$ не следует, что $\bar{d}[tu + (1-t)v] \geqslant 0$ (т. е. $a_t \geqslant 0$). Тем не менее, теорему единственности для (2) доказать можно, если использовать такой результат.

Пусть $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ — некоторое множество индексов и для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$ определено множество индексов $\mathfrak{B}(\alpha) = \{\beta\}$. Пусть для всяких $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}(\alpha)$ определены функции $F^{\alpha\beta}(x, u_{ij}, u_i, u)$. Положим

$$J[u] = J[u](x) = \overline{\inf_{\alpha \in \mathfrak{A}}}\ \overline{\sup_{\beta \in \mathfrak{B}(\alpha)}}\ F^{\alpha\beta}[u](x),$$

где $\overline{\inf}$, $\overline{\sup}$ — inf, sup в структуре классов эквивалентных по мере Лебега измеримых функций от x.

Теорема 2. *Пусть $\infty > J[u] \geqslant J[v] > -\infty$ (п.в.) в G. Предположим, что существуют постоянная $N < \infty$, функция $g \geqslant 0$, $g \in L_n(G)$ и векторы $k_t^{\alpha\beta}(x)$, $h_t^{\alpha\beta}(x)$ такие, что при всех $t \in [0, 1]$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}(\alpha)$ и при почти всех $x \in G$:* а) $b_t^{\alpha\beta} = k_t^{\alpha\beta} + \sqrt{a_t^{\alpha\beta}} h_t^{\alpha\beta}$, $|h_t^{\alpha\beta}|^2 \leqslant N c_t^{\alpha\beta}$, $|k_t^{\alpha\beta}|^n \leqslant g^n \det a_t^{\alpha\beta}$. *Пусть еще* б) $a_t^{\alpha\beta} \geqslant 0$, $c_t^{\alpha\beta} \geqslant 0$ (п.в.) *при* $t \in [0, 1]$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}(\alpha)$, в) *при* $t \in [0, 1]$ $\overline{\inf_{\alpha \in \mathfrak{A}}}\ \overline{\inf_{\beta \in \mathfrak{B}(\alpha)}} (c_t^{\alpha\beta} + \operatorname{tr} a_t^{\alpha\beta}) > 0$ (п.в.).

Тогда $u - v \leqslant \max [u(x) - v(x) : x \in \Gamma]$ в G.

Уравнение (2) для функции, для которой $\bar{d}[u] \geqslant 0$, эквивалентно уравнению

$$\overline{\inf} [\operatorname{tr} (aD^2 u) + (aDu, Du) - u - n (\det a)^{1/n} f^{1/n}] = 0,$$

где $\overline{\inf}$ берется по всем симметричным матрицам $a : a \geqslant 0$, $\operatorname{tr} a = 1$. Это представление (2) дает возможность доказать теорему единственности для (2) с помощью теоремы 2. Аналогичное представление уравнения (1) показывает, что теорема единственности для (1) имеет место при $f \geqslant 0$ в классе функций, для которых $d[u] \geqslant 0$.

Теорему 2 можно легко применить также для доказательства теоремы единственности для задачи с двумя свободными границами (ср. ([5])), поскольку функция u такая, что $\psi_1 \geqslant u \geqslant \psi_2$ и $(-1)^i F[u] \geqslant 0$ там, где $(-1)^i (u - \psi_i) > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{\inf_{t \geqslant 0}}\ \overline{\sup_{s \geqslant 0}} \frac{1}{t+s+1} \{F[u] - t(u - \psi_1) - s(u - \psi_2)\} = 0.$$

Сформулируем теорему существования решения.

Пусть $\mathscr{D} = \{\alpha\}$ — множество в некотором эвклидовом пространстве; матрица $\sigma^\alpha(x)$ размера $n \times n$, n-мерный вектор $b^\alpha(x)$, числовые функции $c^\alpha(x) \geqslant 0$ и $f^\alpha(x)$ непрерывны по $(\alpha, x) \in \mathscr{D} \times E$ и ограничены по x при всяком $\alpha \in \mathscr{D}$. Пусть все первые и вторые производные по x функций $\sigma^\alpha(x)$, $b^\alpha(x)$, $c^\alpha(x)$, $f^\alpha(x)$ непрерывны по x и вместе с $f^\alpha(x)$ ограничены равномерно по (α, x). Положим $a^\alpha = \sigma^\alpha [\sigma^\alpha]^*$ (σ^* — транспонированная матрица σ), $n^\alpha = \operatorname{tr} a^\alpha + |b^\alpha| + c^\alpha$ и пусть при всех x

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{D}} \inf_{\lambda\neq 0} \frac{(a^\alpha(x)\lambda, \lambda)}{|\lambda|^2} > 0.$$

Теорема 3. *Пусть число* μ *достаточно велико, тогда существует ограниченная функция* $w \in W^2_{q,\mathrm{loc}}(E)$ *при всех* q *такая, что*

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{D}} \frac{1}{\mu + n^\alpha} [\operatorname{tr}(a^\alpha D^2 w) + (b^\alpha, Dw) - c^\alpha w - \mu w + f^\alpha] = 0 \qquad (\text{п. в.}) \qquad (3)$$

Сделаем несколько замечаний об этой теореме. Число μ можно взять любым, строго большим нуля, если a^α и b^α не зависят от x. Вопрос о единственности решения (3) может быть в некоторых случаях рассмотрен с помощью теоремы 2. Можно указать пример, в котором решение (3) имеет разрывные вторые производные.

При доказательстве теоремы 3 важную роль сыграл результат, являющийся небольшим обобщением следующей теоремы.

Пусть первые производные по u_{ij}, u_i, u и t функций $tF_{(k)}\left(x, \frac{1}{t} u_{ij}, \frac{1}{t} u_i, \frac{1}{t} u\right)$ $(k = 1, 2)$ ограничены как функции x, u_{ij}, u_i, u, t $(t > 0)$. Предположим, что $a_{(1)} \geqslant 0$, $a_{(2)} \geqslant I$ при всех значениях x, u_{ij}, u_i, u, где I — единичная матрица.

Теорема 4. *Пусть* u^r, $u \in W_n^2(G)$, $u^r(x) \to u(x)$ *при* $x \in G$ *и* $\underline{\inf}_r F_{(2)}[u^r] \in L_n(G)$.

Тогда $F_{(1)}[u] \geqslant \lim_{r\to\infty} \overline{\inf_{s\geqslant r}} F_{(1)}[u^s]$.

Рассматривая $-F_{(1)}[-u]$ вместо $F_{(1)}[u]$ из этой теоремы получаем верхнюю оценку для $F_{(1)}[u]$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Я. Бакельман, Геометрические методы решения эллиптических уравнений, «Наука», 1965. [2] А. Д. Александров, Вестн. Ленингр. унив., № 1, в. 1, 5 (1966). [3] А. Д. Александров, Там же, № 13, в. 3, 5 (1963). [4] Н. В. Крылов, Матем. сборн., 82, 1, 100 (1970). [5] Н. В. Крылов, ДАН, 194, № 6, 1263 (1970).