Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 1

УДК 517.948:621.039 *МАТЕМАТИКА*

И. А. ФЕЛЬДМАН

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 21 X 1970)

В настоящем сообщении продолжается начатое в ([1]) исследование уравнения переноса лучистой энергии методами теории уравнений Винера — Хопфа.

Основное внимание уделяется одному итерационному методу, сходимость которого для уравнения переноса с постоянной индикатрисой рассеяния была установлена Е. Хопфом ([2]), а в случае индикатрисы из $L_2(-1,1)$ — М. В. Масленниковым ([3]).

В п. 1 формулируются некоторые общие предположения об операторных уравнениях Винера — Хопфа, которые в п. 2 применяются к уравнению переноса для отыскания его дефектных чисел и обоснования итерационного метода.

1. Приведем некоторые обозначения из ([1]): $L_p(\mathfrak{B})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — банахово пространство сильно измеримых вектор-функций $f(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ и с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^p dt\right)^{1/p} \quad (< \infty);$$

$M(\mathfrak{B})$ — пространство всех ограниченных сильно измеримых вектор-функций $f(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$; $C_0(\mathfrak{B})$ — подпространство $M(\mathfrak{B})$, состоящее из всех непрерывных вектор-функций, стремящихся к нулю на бесконечности. В дальнейшем через $E(\mathfrak{B})$ обозначается одно из пространств $L_p(\mathfrak{B})$, $M(\mathfrak{B})$, $C_0(\mathfrak{B})$ и через $\bar{E}(\mathfrak{B})$, $\bar{L}_p(\mathfrak{B})$, $\bar{M}(\mathfrak{B})$ и $\bar{C}_0(\mathfrak{B})$ — соответствующие пространства вектор-функций $f(t)$ на всей оси.

В пространстве $E(\mathfrak{B})$ рассмотрим оператор Винера — Хопфа

$$(A\varphi)(t) = \int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{1}$$

где оператор-функция $k(t) \in \bar{L}_1(\mathfrak{S})$, а $\mathfrak{S}$ — замыкание (по операторной норме) множества всех конечномерных операторов в $\mathfrak{B}$.

Существенную роль в исследовании оператора (1) играет оператор-функция

$$K(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,e^{i\lambda t}dt \quad (-\infty < \lambda < \infty) \tag{2}$$

— преобразование Фурье ядра $k(t)$ $(\in \bar{L}_1(\mathfrak{S}))$.

Пусть r — вещественное число. Условимся писать $\varphi(t) \in e^{rt}E(\mathfrak{B})$, если $e^{-rt}\varphi(t) \in E(\mathfrak{B})$. Множество $e^{rt}E(\mathfrak{B})$ является банаховым пространством с нормой $\|\varphi\| = \|e^{-rt}\varphi\|_E$. Аналогично определяется пространство $e^{r|t|}\bar{L}_1(\mathfrak{S})$. В дальнейшем через h обозначается некоторое фиксированное положительное число.

Если оператор-функция $k(t) \in e^{-h|t|}\bar{L}_1(\mathfrak{S})$, то оператор A, определенный равенством (1), ограничен в каждом из пространств $e^{st}E(\mathfrak{B})$ при любом s из промежутка $-h \leqslant s \leqslant h$.

Теорема 1. *Пусть* $k(t) \in e^{-h|t|}\overline{L}_1(\mathfrak{S})$, *при некотором* s $(-h \leqslant s \leqslant h)$ *последовательность операторов* A^n *сильно сходится к нулю в пространстве* $e^{st}E(\mathfrak{B})$ *и* $\varphi(t) \in e^{ht}E(\mathfrak{B})$ — *решение уравнения* $A\varphi = \varphi$. *Если вектор* $\varphi_0(t) \in e^{ht}(\mathfrak{B})$ *таков, что* $\varphi(t) - \varphi_0(t) \in e^{st}E(\mathfrak{B})$, *то последовательность* $A^n\varphi_0 - \varphi$ *сходится к нулю по норме пространства* $e^{st}E(\mathfrak{B})$.

Отметим, что векторы $A^n\varphi_0 - \varphi_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат пространству $e^{st}E(\mathfrak{B})$ и сходятся к вектору $\varphi - \varphi_0$. В качестве вектора $\varphi_0(t)$ в теореме 1 можно взять, например, главный член асимптотики решения $\varphi(t)$ или сумму только тех его слагаемых, которые не попадают в пространство $e^{st}E(\mathfrak{B})$ (см. теорему 4 из ([1])).

Теорема 1, как и аналогичная теорема о неоднородном уравнении, является следствием следующего общего предложения.

Теорема 2. *Пусть банахово пространство* E_1 *содержится в банаховом пространстве* E, B — *линейный ограниченный оператор в каждом из пространств* E *и* E_1, *последовательность* B^n *сильно сходится к нулю в* E_1 *и* $x \in E$ — *решение уравнения* $x - Bx = f$ $(f \in E)$. *Если вектор* $x_0 \in E$ *таков, что* $x - x_0 \in E_1$, *то последовательность*

$$B^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} B^j f - x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится к нулю по норме пространства E_1.

Теорема 2, в свою очередь, легко следует из теоремы 1 статьи ([4]).

Пусть $k(t) \in e^{-h|t|}\overline{L}_1(\mathfrak{S})$. Через $\alpha(s)$ $(-h \leqslant s \leqslant h)$ обозначим $\dim \operatorname{Ker}(I - A)$ в пространстве $e^{st}E(\mathfrak{B})$, через $\beta(s)$ — $\dim \operatorname{Coker}(I - A) = \dim e^{st}E(\mathfrak{B}) / \overline{\operatorname{Im}(I - A)}$ и через $\varkappa(s)$ — разность $\alpha(s) - \beta(s)$. Числа $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ называются дефектными числами оператора $I - A$ в пространстве $e^{st}E(\mathfrak{B})$, а число $\varkappa(s)$ — индексом этого оператора. Функции $\alpha(s)$ и $\varkappa(s)$ не убывают, а функция $\beta(s)$ не возрастает $(-h \leqslant s \leqslant h)$. При $k(t) \in e^{-h|t|}\overline{L}_1(\mathfrak{S})$ оператор-функция, определенная равенством (2), голоморфна в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < h$ и непрерывна вплоть до границы.

Лемма 1. *Пусть* $k(t) \in e^{-h|t|}L(\mathfrak{S})$ *и все значения оператор-функции* $I - K(\lambda)$ *на прямых* $\operatorname{Im}\lambda = s_j$ $(j = 1, 2;\ -h \leqslant s_2 \leqslant s_1 \leqslant h)$ *обратимы*. *Тогда* $\varkappa(s_1) - \varkappa(s_2) = m$, *где* m — *сумма алгебраических кратностей* всех характеристических чисел* $I - K(\lambda)$ *в полосе* $s_2 < \operatorname{Im}\lambda < s_1$.

В доказательствах приводимых ниже теорем используется одно простое предложение о спектральном радиусе оператора A. Прежде чем привести его формулировку, отметим, что спектральный радиус r_A оператора A один и тот же в каждом из пространств $E(\mathfrak{B})$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *гильбертово пространство* $k(t) \in \overline{L}_1(\mathfrak{S})$. *Тогда для спектрального радиуса оператора* A *в пространстве* $E(\mathfrak{B})$ *справедлива следующая оценка:*

$$r_A \leqslant \sup_{-\infty < \lambda < \infty} \|K(\lambda)\|.$$

Число $\sup \|K(\lambda)\|$ *мажорирует также норму оператора* A *в пространстве* $L_2(\mathfrak{B})$.

2. Уравнение переноса лучистой энергии сводится к операторному уравнению Винера — Хопфа $(I - A)\varphi = f$, где A — оператор вида (1) с ядром

$$k(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\cos\nu} e^{t/\cos\nu} Q_- T, & 0 < t < \infty, \\ \dfrac{1}{\cos\nu} e^{t/\cos\nu} Q_+ T, & -\infty < t < 0; \end{cases}$$

---

* Определения см., например, в ([1]).

Теорема 4. *Пусть* $g_0 < 1$ *и число* h $(0 < h < 1)$ *не является характеристическим для оператор-функции* $I - T - \lambda M$.

Тогда существует базис $\varphi_{jk}(t, \omega)$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, q_j)$ *подпространства всех решений уравнения* $A\varphi = \varphi$, *принадлежащих* $e^{ht}E(\mathfrak{B})$, *такой, что последовательность*

$$A^m e^{\gamma_j t}\psi_{jk}(\omega) - \varphi_{jk}(t, \omega) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

сходится к нулю по норме пространства $L_2(\mathfrak{B})$.

Отметим, что последовательность функций (3) сходится к нулю и равномерно на множестве $G = \{\omega \in \Omega, t \in [0, \infty)\}$, так как норма оператора A в пространстве измеримых и ограниченных на G функций равна g_0.

Теорема, аналогичная теореме 4, справедлива и в случае $g_0 = 1$. При этом функции $e^{\gamma_j t}\psi_{jk}(\omega)$ следует заменить функциями $e^{\gamma_j t}\psi_{jk}(\omega) + c_{jk}$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, q_j)$ и $t + (1 - g_1)^{-1}\cos\nu + c_0$, где $g_1 = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} g(\mu)\mu d\mu$, а c_{jk} и c_0 — некоторые константы. Можно положить, эти константы равными нулю, но тогда соответствующая последовательность будет сходиться по более слабой норме.

Мы не формулируем здесь предложений о решении неоднородного уравнения $\varphi - A\varphi = f$, которые могут быть получены с помощью теоремы 2.

Предложения п. 2 пересекаются с полученными иным методом результатами М. В. Масленникова ([3]). В ([3]), в частности, установлена сходимость последовательности (3) (по некоторой другой норме) для случая $g(\mu) \in L_2(-1, 1)$.

Автор выражает глубокую благодарность И. Ц. Гохбергу за полезные замечания.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
10 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Фельдман, Функц. анализ и его прилож. 5, в. 3 (1971). [2] E. Hopf, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge Tracts, № 31, 1934. [3] М. В. Масленников, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, в. 97 (1968). [4] И. А. Фельдман, Изв. АН МолдССР, № 4 (1966).