Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 1

УДК 518.517.948

МАТЕМАТИКА

В. Д. ЧАРУШНИКОВ

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 XII 1970)

1. Пусть имеем линейные нормированные пространства E и F и наша задача заключается в решении уравнения

$$Au = f \quad (u \in E,\ f \in F). \tag{1}$$

Предположим, что E_n и F_n являются n-мерными подпространствами пространств E и F соответственно. P_n означает оператор, отображающий пространство E в E_n, а Q_n — оператор, отображающий пространство F в F_n. Задачу (1) заменим приближенной задачей

$$A_n u_n = f_n \quad (u_n \in E_n,\ f_n \in F_n). \tag{2}$$

Качество приближенного метода будем характеризовать нормой оператора погрешности

$$R_n = A^{-1} - A_n^{-1}Q_n.$$

Понятно, что точность приближенного метода зависит от выбора соответствующих подпространств и структуры оператора A_n. Предположим сначала, что подпространства E_n и F_n каким-то образом выбраны, и выберем теперь оператор A_n так, чтобы норма оператора погрешности была минимальна. В этом случае будем говорить, что A_n оптимизирует норму R_n. Обозначим через P_n^0 оператор наилучшего приближения в пространстве E_n, т. е. оператор, удовлетворяющий условию

$$\| u - P_n^0 u \|_E = \inf_{u_n \in E_n} \| u - u_n \|_E. \tag{3}$$

Теорема 1. *Оператор A_n, оптимизирующий норму оператора погрешности R_n, определяется формулой*

$$A_n^0 = Q_n A P_n^{0^{-1}}. \tag{4}$$

Оператор $\tilde{P}_n^0$ будем называть **оператором почти наилучшего приближения**, если

$$\| u - \tilde{P}_n^0 u \|_E \leqslant C \inf_{u_n \in E_n} \| u - u_n \|_E. \tag{5}$$

Будем говорить, что оператор $\tilde{A}_n^0$ **почти оптимизирует** норму оператора погрешности R_n, если

$$\| A^{-1} - \tilde{A}_n^{0^{-1}} Q_n \|_{F\to E} \leqslant C \| A^{-1} - A_n^{0^{-1}} Q_n \|_{F\to E},$$

где A_n^0 — оператор, оптимизирующий норму R_n.

Аналогично теореме 1 имеет место

Теорема 2. *Оператор $\tilde{A}_n^0$, почти оптимизирующий норму оператора погрешности R_n, определяется по формуле*

$$\tilde{A}_n^0 = Q_n A \tilde{P}_n^{0^{-1}}. \tag{6}$$

Ясно, что аппроксимативный метод решения задачи (1) предполагает наличие расширяющейся последовательности пространств $\{E_n\}$ и соответствующей ей последовательности операторов $\{P_n\}$. Таким образом, в оптимальном методе при любых u и n должно выполняться условие (3). Если же при любых u и n выполняется неравенство (5) с константой, не зависящей ни от u, ни от n, получаем почти оптимальный метод. Почти оптимальный метод получим, например, в случае, если операторы последовательности будут проекционными и их нормы будут ограничены в совокупности. Такую последовательность операторов можно легко построить, когда, скажем, пространство E обладает базисом. Мы говорили о равномерной ограниченности в совокупности норм операторов P_n, имея в виду какое-то конкретное пространство, и оптимальность метода понимали по отношению к этому пространству. В последнее время возникла задача построения универсальных алгоритмов, т. е. алгоритмов, близких в том или ином смысле к оптимальным (например, почти оптимальных), но уже по отношению не к одному конкретному пространству, а к целому классу таких пространств. Такие алгоритмы можно строить, основываясь на интерполяционных теоремах типа теорем Рисса и Марцинковича (см. ([12])).

2. Будем предполагать, что уравнение (1) рассматривается в гильбертовом пространстве H, оператор A будем считать самосопряженным и положительно определенным, а A^{-1} — вполне непрерывным. В этих предположениях мы можем, исходя из основного пространства, построить целую шкалу гильбертовых пространств $\{H_\alpha\}$, скалярные произведения и нормы в которых определяются соответственно по формулам

$$(u, v)_\alpha = (A^\alpha u, v), \quad \|u\|_\alpha = \sqrt{(A^\alpha u, u)}.$$

Оператор наилучшего приближения $P_n{}^0$ в данном случае является, очевидно, просто оператором ортогонального проектирования на подпространства E_n, приближенное решение $u_n \in E_n$ находится из условия минимума нормы разности $u - u_n$ в том или ином пространстве введенной шкалы:

$$\|u - u_n\|_k \rightrightarrows \min \text{ для всех } u_n \in E_n. \tag{7}$$

Для прохождения n-го приближенного получаем линейную алгебраическую систему

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (e_i, e_i)_k = (f, e_j)_{k-1}. \tag{8}$$

Случаи $k = 1$ и $k = 2$ соответствуют классическим проекционным методам Бубнова — Галеркина и наименьших квадратов ([1-10]).

Успешное применение приближенного метода (7) зависит от того, насколько удачно выбрана координатная последовательность

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \tag{9}$$

Отождествим отрезок координатной последовательности из первых n членов с вектором

$$\mathbf{u}_n = (e_1, \ldots, e_n), \tag{10}$$

который также будем называть к о о р д и н а т н ы м. Обозначим далее через $T_n^{(k)}(\mathbf{u}_n)$ оператор, сопоставляющий каждому элементу f приближенное решение уравнения (1), полученное приближенным методом (7), и введем в рассмотрение оператор погрешности

$$R_n^{(k)}(\mathbf{u}_n) = A^{-1} - T_n^{(k)}(\mathbf{u}_n). \tag{11}$$

Если правая часть уравнения (1) будет принадлежать некоторому пространству H_α, то ясно, что $R_n^{(k)}(\mathbf{u}_n)$ можно рассматривать как вполне непрерывный оператор, отображающий пространство H_α в пространство H_k. Координатный вектор $\mathbf{u}_n{}^0$ мы будем называть о п т и м а л ь н ы м, если соответствующий ему оператор погрешности $R_n^{(k)}(\mathbf{u}_n{}^0)$ удовлетворяет условию

$$\|R_n^{(k)}(\mathbf{u}_n^0)\|_{\alpha\to k} \leqslant \|R_n^{(k)}(\mathbf{u}_n)\|_{\alpha\to k} \tag{12}$$

для всех векторов $\mathbf{u}_n$.

Часто приходится ограничиваться нахождением почти оптимальных координатных векторов. Координатный вектор $\tilde{\mathbf{u}}_n^0$ мы будем называть **почти оптимальным**, если соответствующий ему оператор погрешности удовлетворяет условию

$$\| R_n^{(k)}(\tilde{\mathbf{u}}_n^0) \|_{\alpha\to k} \leqslant C \| R_n^{(k)}(\mathbf{u}_n^0) \|_{\alpha\to k}. \tag{13}$$

Перейдем непосредственно к задаче построения оптимальных координатных векторов. Геометрически их структура довольно ясна. В самом деле, при сделанных предположениях мы фактически имеем дело с проблемой наилучшего приближения на компактных множествах типа эллиптического цилиндра. Поэтому наилучшее приближение мы получаем, когда в качестве подпространства E_n выбираем подпространства, натянутые на вектора главных осей цилиндра ([11]).

Действительно имеет место

Теорема 3. *Пусть $\alpha > k - 2$. Координатный вектор $\mathbf{u}_n^0$ оптимален, если его компоненты совпадают с первыми n собственными элементами оператора A, причем*

$$\| R_n^{(k)}(\mathbf{u}_n^0) \|_{\alpha\to k} = 1/\lambda_{n+1}^{1/2(\alpha-k)+1} \tag{14}$$

(λ_{n+1} — *$(n+1)$-е собственное число оператора A*).

Как следствие можно получить обычную оценку погрешности.

Практически оптимальные координатные векторы можно найти лишь в самых простых случаях. Однако почти оптимальные координатные векторы удается построить сравнительно легко. Воспользуемся для их нахождения следующим критерием: *если для заданной последовательности подпространств E_n существует последовательность проекционных операторов $P_n: H_k \to E_n$ и числовая последовательность μ_n*

$$c_1\lambda_n \leqslant \mu_n \leqslant c_2\lambda_n \tag{15}$$

такие, что

$$\| u - P_n u \|_k \leqslant C \| f \|_\alpha / \mu_{n+1}^{1/2(\alpha-k)+1}, \tag{16}$$

то координатные векторы, на компоненты которых натянуты подпространства E_n будут почти оптимальными. Доказательство очевидно. В частности, как легко показать, этому критерию удовлетворяют подпространства, натянутые на собственные векторы операторов, сходных с оператором A (определение С. Г. Михлина см. ([3]). Такие векторы довольно легко построить.

3. Предположим теперь, что задана некоторая система функционалов $\{l_i\}$, биортогональная к системе элементов $\{e_i\}$, образующих координатную последовательность. Тогда если $u = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$, то $l_i u_n = c_i$, и систему (8) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (l_i, u_n)(e_i, e_j)_k = (f, e_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

(l_i, u_n) — система значений функционалов l_i на приближенном решении u_n, иначе ее можно интерпретировать как систему приближенных значений функционалов l_i на точном решении u нашей задачи. Сам способ построения этих решений представляет собой абстрактный аналог вариационно-разностной схемы. Вариационный метод для получения разностных схем решения некоторых вибрационных задач был использован в работе ([13]) (см. также ([14], [15]) и др.). Для равномерно эллиптических краевых задач удается построить вариационно-разностные схемы, которые в смысле определения, данного в п. 1, оказываются почти оптимальными. При этом для конструирования почти оптимальной координатной последовательности используются сплайн-функции.

Замечание. Мы везде считали, что оператор A^{-1} существует и ограничен. Если же предположить только существование оператора A^{-1}, не предполагая его ограниченности, то задача (1) будет некорректно поставленной. Приближенное решение таких задач осуществляется на основе теории регуляризации, разработанной А. Н. Тихоновым: на расслоении (E, A, F) строится регуляризующий оператор (точное определение см., например, в ([16], [17])). Первые регуляризаторы были построены А. Н. Тихоновым. В дальнейшем оказалось, что, если расслоенное пространство (E, A, F) образуется парой гильбертовых пространств, то кроме классических регуляризаторов А. Н. Тихонова ([18], [19]) существует еще много других. Поэтому вопрос об оптимальных приближенных методах решения некорректно поставленных задач — это, по существу, вопрос о построении оптимальных в том или ином смысле регуляризующих операторов. Если предположить, что мы находимся в условиях идеализированного случая и что правая часть уравнения (1) нам известна абсолютно точно, то качество приближенного метода, соответствующего регуляризатору T_n, естественно характеризовать оператором погрешности

$$R_n = I - T_n A \quad (I \text{ — единичный оператор}).$$

Регуляризирующий оператор T_n^0 будем называть **оптимальным**, если

$$\|I - T_n^0 A\|_E \leqslant \|I - T_n A\|_E.$$

При некоторых довольно естественных предположениях о подпространствах E_n гильбертова пространства E, в которых ищется приближенное решение задачи (1), оптимальный регуляризатор будет иметь вид

$$T_n^0 = P_n A^{-1},$$

где P_n — оператор проектирования на E_n.

Отметим еще, что сделанное в п. 3 предположение о положительной определенности оператора A можно заменить более общим, а именно, считать, что A удовлетворяет условию

$$(Au, Ku) \geqslant \alpha \|Ku\|^2, \quad u \in D(A), \quad \alpha > 0,$$

где K — непрерывно обратимый оператор и $D(K) \supseteq D(A)$.

Соответствующие результаты обобщаются и на этот случай.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
16 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др., Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1969. [2] С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, 1957. [3] С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, «Наука», 1966. [4] С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, 1952. [5] М. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер, Численные процессы решения дифференциальных уравнений, М., 1969. [6] Н. И. Польский, ДАН, 143, № 4 (1962). [7] Н. И. Польский, УМН, 18, в. 2 (1963). [8] А. В. Джишкариани, Журн. вычислит. математ. и матем. физ., 8, № 5 (1968). [9] J. Nitsche, Zs. Angew. Math. u. Mech., 49, H. 10 (1969). [10] В. Д. Чарушников, Дифференциальные уравнения, № 2 (1971). [11] A. N. Kolmogoroff, Ann. Math., 37, 107 (1936). [12] М. А. Красносельский, Н. Н. Забрейко и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1968. [13] R. Courant, Bull. Am. Math. Soc., 49, 1 (1943). [14] Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 9, № 5 (1969). [15] Ю. К. Демьянович, ДАН, 153, № 2 (1964). [16] В. К. Иванов, Сиб. матем. журнал, 7, № 3 (1966). [17] А. Б. Бакушинский, Вычислительные методы и программирование, 12, М. (1969). [18] А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3 (1963). [19] А. Н. Тихонов, ДАН, 153, № 1 (1963).