Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 6

УДК 519.4 : 513.88 *МАТЕМАТИКА*

Ю. И. ЛЮБИЧ, В. И. МАЦАЕВ, Г. М. ФЕЛЬДМАН

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ СПЕКТРА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 V 1971)

Вопрос об отделимости спектра линейного оператора был поставлен и изучен в работах ([1], [2]). Один из реализованных в этих работах подходов (([2]), гл. 1) — метод гармонического анализа — состоит в построении квазиступенчатых функций от оператора, имеющих вид

$$\tilde{\varphi}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{iAt} dt, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ принадлежит некоторому кольцу * скалярных функций. Фигурирующая в (1) экспонента e^{iAt} есть не что иное, как порождаемое инфинитезимальным оператором iA представление группы $\mathbf{R}$. При этом спектр оператора предполагается вещественным, а отделимость обеспечивается условием неквазианалитичности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \| e^{iAt} \|}{1 + t^2} dt < \infty. \tag{2}$$

Аналогично можно действовать в случае унитарного спектра, но через представление A^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ группы $\mathbf{Z}$ (ср. ([3])). Для унитарных операторов использование соответствующего представления для получения спектральной теоремы является классическим методом (см., например, ([4]), гл. IV). Аналогичное средство для самосопряженных операторов — теорема Стоуна ([5]).

В настоящей работе изучается вопрос об отделимости спектра представления группы. Его можно рассматривать как грубый аналог традиционного вопроса о разложении представления на неприводимые компоненты. Огрубление необходимо, поскольку речь идет о неунитарных бесконечномерных представлениях (более того, действующих в банаховом пространстве).

Обозначения. G — локально компактная сепарабельная абелева группа. $\Gamma = \mathrm{Hom}(G, C_0)$ — группа характеров (вообще говоря неунитарных), T — сильно непрерывное представление группы G ограниченными операторами в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, $\sigma(T)$ — спектр представления в смысле работы ** ([6]).

Группу Γ мы наделим компактно открытой топологией. Тогда она также будет локально компактной. Если представление T равномерно непрерывно, то спектр $\sigma(T)$ компактен в Γ.

Определение 1. Пусть $Q \subset \Gamma$ — компакт. Подпространство $L(Q) \subset \mathfrak{B}$ называется *спектральным*, если 1) $L(Q)$ приводит представление; 2) ограничение $T(Q) = T | L(Q)$ равномерно непрерывно; 3) $\sigma(T(Q)) \subset \sigma(T) \cap Q$; 4) $\mathrm{Int}(\sigma(T) \cap Q) \subset \sigma(T(Q))$, где Int понима-

* В ([1], [2]) было использовано счетнонормированное кольцо.

** В ([6]) была доказана непустота спектра и его замкнутость в поточечной топологии при условии, что представление равномерно непрерывно.

ется в топологии относительно * $\sigma(T)$; 5) если подпространство L приводит представление и $\sigma(T|L) \subset Q$, то $L \subset L(Q)$.

Определение 2. Если каждому компакту $Q \subset \Gamma$ соответствует спектральное подпространство $L(Q)$, то спектр представления называется отделимым.

Очевидно, что если спектр представления содержит более одной точки и отделим, то представление приводимо.

Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

Теорема 1. *Если представление T неквазианалитично в том смысле, что*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|T_{ng}\|}{1+n^2} < \infty, \tag{3}$$

то его спектр отделим.

Отметим, что в силу (3) представление имеет нулевой экспоненциальный тип:

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{\ln \|T_{ng}\|}{n} = 0. \tag{4}$$

Отсюда следует, что спектр представления унитарен.

Условие (3), где вместо $\|T_g\|$ состоит некоторая функция $\alpha(g)$, фигурирует в ([7]) как необходимое и достаточное того, чтобы кольцо $L_\alpha(G)$ функций на группе G, суммируемых с весом $\alpha(g)$, было регулярным **. При выполнении условия (3) кольцо $L_\alpha(G)$ обладает еще некоторыми важными дополнительными свойствами (см. ([7])).

Аналогично (1) положим для $\varphi \in L_\alpha(G)$

$$\tilde{\varphi}_T = \int_G \varphi(g)\, T_g dg \tag{5}$$

(это стандартная конструкция теории представлений). С другой стороны, положим (также стандартным образом)

$$\tilde{\varphi}(\chi) = \int_G \varphi(g)\, \chi(g)\, dg$$

для унитарных характеров χ. Назовем кольцевым спектром представления T множество тех (унитарных) χ, для которых $\tilde{\varphi}(\chi) \in \sigma(\tilde{\varphi}_T)$ для всех $\varphi \in L_\alpha(G)$.

При помощи упомянутых выше результатов Домара (в сторону достаточности) доказывается

Лемма. *Кольцевой спектр неквазианалитического представления отделим (в прежнем смысле).*

При этом спектральное подпространство $L(Q)$ определяется следующим образом: $L(Q) = \{x \mid \tilde{\varphi}_T x = x$ для всех $\varphi \in L_\alpha(G)$, для которых $\tilde{\varphi}(\chi) = 1$ в окрестности компакта $Q\}$.

После этого, используя ([6]), мы устанавливаем совпадение (в данной ситуации) кольцевого спектра со спектром в смысле ([6]) и, тем самым, доказываем теорему 1.

Теорема 1 точна. Именно, справедлива

Теорема 2. *Если измеримая функция $\alpha(g) \geq 1$ на группе G такова, что*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha(ng_0)}{1+n^2} = \infty \tag{6}$$

* А не всей Г.

** Для группы R условие (3) эквивалентно (2) (A — инфинитезимальный оператор представления), а (2) в качестве условия регулярности кольца было получено Г. Е. Шиловым ([8]).

для некоторого элемента g_0 и, кроме того,

$$\forall g, h \quad \alpha(g+h) \leqslant \alpha(g)\alpha(h), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \alpha(ng)}{n} = 0, \tag{7}$$

то представление группы G сдвигами в $L_\alpha(G)$ удовлетворяет оценке

$$\|T_g\| \leqslant \alpha(g),$$

но спектр этого представления неотделим.

Пусть L — такое подпространство. Натянем кольцо на операторы $T_g|L$ и естественно вложим его пространство максимальных идеалов в группу Г. При помощи результатов ([6]) устанавливается совпадение пространства максимальных идеалов со спектром представления. После этого срабатывает теорема Домара (в сторону необходимости).

В заключение сформулируем теорему о полноте системы спектральных подпространств, которая утверждает в грубой форме полную приводимость представлений рассматриваемого класса.

Теорема 3. *Пусть представление T неквазианалитично.*

Тогда для любого покрытия спектра $\sigma(T)$ множествами U_ν открытыми в Г, *замыкания которых компактны, система спектральных подпространств $\{L(\overline{U}_\nu)\}$ полна в $\mathfrak{B}$.*

Таким образом, все основные результаты из ([2]), гл. 1, переносятся на представления абелевых локально компактных групп (требование сепарабельности в некотором смысле несущественно).

Авторы выражают благодарность Е. А. Горину, Д. П. Желобенко, В. Э. Кацнельсону М. Г. Крейну, В. А. Марченко и Б. С. Митягину за стимулирующие указания и полезные дискуссии.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Институт химической физики
Академии наук СССР
Москва

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
6 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, ДАН, 131, № 1, 21 (1960). [2] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Матем. сборн., 56, № 4, 433 (1962). [3] J. Wermer, Duke Math. J., 19, № 4, 615 (1952). [4] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966. [5] M. Stone, Ann. Math., 33, 643 (1932). [6] Ю. И. Любич, ДАН, 200, № 4 (1971). [7] Y. Domar, Acta Math., 96, 1 (1956). [8] Г. Е. Шилов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 21, 1 (1947).