

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

Г. М. МАГОМЕДОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ОТНОСИТЕЛЬНО КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(Представлено академиком И. Н. Вексу 2 VI 1971)

В этой заметке даны неравенства, из которых следует устойчивость интеграла

$$v_0(t_0) = \int_{\Gamma_0} \frac{f(\tau)}{\tau - t_0} d\tau, \quad t \in \Gamma_0, \quad (A)$$

относительно колебаний контура Γ_0 в смысле метрик пространств L_p и C .

В работе ⁽³⁾ доказана подобная устойчивость интеграла типа Коши

$$\Psi_0(z) = \int_{\Gamma_0} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in \overline{\Gamma_0}, \quad (B)$$

в смысле метрики пространства C в случае замкнутого Γ_0 . Но основное неравенство в ⁽³⁾ зависит от расстояния между z и Γ_0 и не имеет смысла, когда $z \in \Gamma_0$. Поэтому результаты работы ⁽³⁾ к интегралу (A) неприменимы.

Пусть Γ_0 и Γ_k обе замкнутые или оба разомкнутые с общими концами простые кривые на комплексной плоскости, удовлетворяющие условию

$$\inf_{t_i'', t_i' \in \Gamma_i} \frac{|t_i'' - t_i'|}{S(t_i'', t_i')} = m_i > 0 \quad (i = 0; k), \quad (1)$$

где t_i — аффикс точки, лежащей на Γ_i , а $S(t_i'', t_i')$ — длина не большей из дуг Γ_i , соединяющих t_i'' и t_i' .

Из (1) следует существование функций $t_i = \alpha_i(s)$, отображающих $(0, l_0)$ на Γ_i (l_0 — длина дуги Γ_0) и удовлетворяющих условию

$$\inf_{0 < s', s'' < l_0} \frac{\alpha_i(s'') - \alpha_i(s')}{|s'' - s'|} = \overline{m}_i > 0.$$

Пусть $f(t)$ определена на Γ_0 и принадлежит L_p . Определим ее и на Γ_k так, чтобы почти всюду выполнялось равенство

$$f[\alpha_k(s)] = f_0[\alpha_0(s)] \quad (0 < s < l_0). \quad (2)$$

Тогда при любых $1 \leq p \leq p_1 < \infty$ в предположении существования рассматриваемых интегралов получаем неравенство *

$$\|v_k - v_0\|_p \leq N \left[\int_0^{\varepsilon_k} \frac{w_p^{(0)}(x)}{x} dx + \varepsilon_k \int_{\varepsilon_k}^{l_0} \frac{w_p^{(0)}(x)}{x^2} dx \right] \equiv NF(\varepsilon_k), \quad (a)$$

где v_k — интеграл типа (A) по контуру Γ_k , $\|f\|_p$ — норма в пространстве

* В частном случае, когда Γ_k получена скольжением Γ_0 самой по себе, неравенство (a) вытекает из работы Л. Г. Магнарадзе ⁽⁴⁾.

$L_p(0, l_0)$ ($\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_C$ — норма в пространстве C); $\varepsilon_k = \max [\|\alpha_k - \alpha_0\|_{p_2}, \|\alpha_k' - \alpha_0'\|_q]$, $p_2 = p_1 p / (p_1 - p)$, $1/p + 1/q = 1$,

$$w_{p_1}^{(i)}(\sigma) = \sup_{|h| < \sigma} \left\{ \int_0^{l_0} |f[\alpha_i(s+h)] - f[\alpha_i(s)]|^p ds \right\}^{1/p},$$

причем в случае разомкнутой Γ_i , если $(s+h) \in [0, l_0]$, принимается, что $f[\alpha_i(s+h)] \equiv 0$.

Постоянная $N > 0$ зависит от $\bar{m}_i$, p , $\|\varphi\|_p$. Неравенство доказывается для замкнутых Γ_i . Случай разомкнутых Γ_i легко сводится к случаю замкнутых Γ_i . При доказательстве (а) мы, в частности, пользовались тем, что $\int \frac{d\tau}{\tau - t_i} = \pi \cdot i$ почти всюду для замкнутых Γ_i , и неравенством

$$\sigma \left\{ \int_0^{l_0} \left[\frac{w_p^{(0)}(x)}{x} \right]^p dx \right\}^{1/p} \leq 4l_0^{1/p} \int_0^\sigma \frac{w_p^{(0)}(x)}{x} dx, \text{ которое вытекает из свойств}$$

модулей непрерывности.

Из неравенства следует

Теорема 1. Если существует $\delta > 0$ такая, что $\sup_{0 < \sigma < l_0} w_p^{(0)}(\sigma) / \sigma^\delta < \infty$, а кривые Γ_n ($n = 0, \dots, \infty$) удовлетворяют условию (1), причем $\inf_{n > 0} \{m_n\} > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v_0\|_p = 0$.

Возьмем $f(t_0) \in H$ на Γ_0 и примем

$$f(\alpha_k(s)) \equiv f(\alpha_0(s)). \quad (3)$$

Н. И. Мухелишвили доказал ⁽¹⁾, что функции $v_i(t_i) = \int_{\Gamma_i} \frac{f(\tau) - f(t_i)}{\tau - t_i} d\tau$ принадлежат H . Из работы ⁽²⁾ следует, что если $u(t) \in H$, то

$$\|u\|_C \leq L \cdot \|u\|_p^v, \quad 0 < v. \quad (*)$$

Из (а) и (*) вытекает неравенство

$$\|v_k - v_0\|_C \leq M[F(\varepsilon_k)]^v + \gamma_k, \quad (b)$$

где $M > 0$ — постоянная, зависящая от N и L , а

$$\gamma_k = \left\| \left(\int_{\Gamma_k} \frac{d\tau}{\tau - t_k} - \int_{\Gamma_0} \frac{d\tau}{\tau - t_0} \right) f(t_0) \right\|_C.$$

Ясно, что если кривые Γ_i — гладкие, то $\gamma_k = 0$.

Из неравенства (b) следует

Теорема 2. Если $f(t) \in H$, а $\{\Gamma_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v_0\|_C = 0$.

Если же $f(t)$ определена и на Γ_k и нельзя принять (2) и (3), то вместо неравенств (а), (b) имеем

$$\begin{aligned} \|v_k - v_0\|_p \leq \bar{N} \left\{ \int_0^{\varepsilon_k} \frac{w_p^{(0)}(x) + w_p^k(x)}{x} dx + \varepsilon_k \int_{\varepsilon_k} \frac{w_0(x)}{x} dx + \right. \\ \left. + \bar{\varepsilon}_k \ln \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_k} \right) \right\} = \bar{N} \bar{F}(\varepsilon_k), \end{aligned} \quad (\bar{a})$$

$$\|v_k - v_0\|_C \leq \bar{M}[\bar{F}(\varepsilon_k)]^v + \gamma_k, \quad (\bar{b})$$

где $\bar{\varepsilon}_k = \|f[\alpha_k(s)] - f[\alpha_0(s)]\|_F$.

Очевидно, что если

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}_n (1 + 1/\varepsilon_n) = 0, \quad (4)$$

то из неравенства $(\bar{a})$ следует утверждение теоремы 1. Из неравенства $(\bar{b})$ утверждение теоремы 2 вытекает без всяких оговорок, ибо из условия этой теоремы следует выполнение (4).

Неравенства (b) и $(\bar{b})$ мы получили, пользуясь (a) и $(\bar{a})$, но оценку для $\|v_k - v_0\|_C$ можно получить и непосредственно. Обозначим $\varepsilon_k^* = \|\alpha_k' - \alpha_0'\|_C$, $w(\sigma) = \max_{i \mid |t'' - t'| < \sigma} |f(t_i'') - f(t_i')|$.

Тогда имеет место

$$\|v_k - v_0\|_C \leq N^* \left\{ \int_0^{\varepsilon_k^*} \frac{w(x)}{x} dx + \varepsilon_k^* \int_{\varepsilon_k^*}^{l_0} \frac{w(x)}{x^2} dx + \varepsilon_k^* \ln \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_k^*} \right) \right\} + \gamma_k. \quad (c)$$

Из (c) следует

Теорема 3. Если $f(t) \in H$ в некоторой области, содержащей Γ_0 , а кривые Γ_n ($n = 0, \dots, \infty$) удовлетворяют (1) и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^* = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v_0\| = 0.$$

В формулировке теоремы 3 условие $\inf_{n > 0} \{m_n\} > 0$ опущено, поскольку оно следует из $m_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^* = 0$.

Теорема 2 является более общей по сравнению с теоремой 3 относительно ограничений на Γ_n , но в смысле $\|v_n - v_0\|_C \rightarrow 0$ последняя теорема лучше для некоторых классов Γ_n .

Пользуясь неравенством (a) или неравенством $(\bar{a})$, при помощи некоторых дополнительных построений, можно доказать и устойчивость интеграла типа Коши относительно колебаний Γ_0 .

Теорема 4. Если $f(z) \in H$ в некоторой области, содержащей Γ_0 , а замкнутые контуры Γ_n ($n = 0, \dots, \infty$) удовлетворяют условию (1) и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^* = 0$ или же $\min_{n > 0} \{m_n\} > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, то для любого $\varepsilon < 0$ найдется

число n_0 , не зависящее от положения $z \in \Gamma_n$ ($n > n_0$), что при всех $n > n_0$ верно $\|\Psi_n(z) - \Psi_0(z)\|_C < \varepsilon$, где $\Psi_n(z)$ — интеграл типа (B) по контуру Γ_n .

Как мы оговорили вначале, утверждение, подобное теореме 4, доказано в (3). Но теорема 4 является более общей, чем соответствующая теорема из (3), поскольку n_0 не зависит от положения z относительно Γ_0 и ограничения на Γ_n существенно менее жесткие.

Дагестанский государственный университет
им. В. И. Ленина
Махачкала

Поступило
5 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1961.
² Х. Ш. Мухтаров, Докл. АН АзербССР, 21, № 4 (1965). ³ Л. А. Чикин, ДАН, 111, № 1, 44 (1956). ⁴ Л. Г. Магнарадзе, Тр. Тбилисс. гос. унив., 117, 369 (1966).