Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 6

УДК 533.95 *ГИДРОМЕХАНИКА*

В. И. ПЕТВИАШВИЛИ

РАСПАД ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В СЛАБОДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

(Представлено академиком Б. Б. Кадомцевым 14 V 1971)

1. Известно, что в нелинейных диспергирующих средах могут существовать одномерные волны со стационарным профилем — периодические волны (п.в.) и солитоны, которые можно считать частным видом п.в. ([1-3]). В средах с положительной дисперсией, в которых фазовая скорость волны растет вместе с волновым числом, п.в. неустойчива относительно распада ([4, 5]).

В средах с отрицательной дисперсией спектр нераспадный, но в работах ([6-9]) показывается, что в слабонелинейном случае, когда п.в. можно представить в виде синусоиды с медленно колеблющимися амплитудой и фазой, п.в. все же неустойчивы относительно малых длинноволновых возмущений. В работе ([10]) исследована устойчивость крайне нелинейной п.в. — солитона и показано, что в средах с отрицательной дисперсией солитоны устойчивы, а в средах с положительной дисперсией — неустойчивы относительно искривления фронта солитона.

В данной работе исследуется устойчивость п.в. в промежуточном по нелинейности случае с учетом неодномерности возмущений.

2. Рассмотрим для простоты модельную среду, описываемую уравнением Кортевега-де-Вриза, обобщенным на случай слабой неодномерности в ([10]):

$$\partial v / \partial t + v\, \partial v / \partial x + \partial^3 v / \partial x^3 = \partial \varphi / \partial y; \tag{1}$$

$$\partial \varphi / \partial x = \mp {}^1/_2 \partial v / \partial y. \tag{2}$$

Это уравнение описывает волны на воде, ионнозвуковые и магнитозвуковые волны и пр. со слабой дисперсией в системе отсчета, движущейся относительно среды со скоростью звука ± 1. Верхний знак относится к среде с отрицательной дисперсией, нижний — с положительной.

Зависимость v от y считается слабой по сравнению с зависимостью от x.

3. Исследуем сперва решение (1) в виде п.в. Подставив в (1) $v = F(x - ut)$, получаем

$$\partial^3 F / \partial x^3 + (F - u)\partial F / \partial x = 0. \tag{3}$$

Считаем среднее от F по x равным нулю и ищем решение (3) в виде $F(x) = u - 12\wp(x + \alpha)$, где α — постоянная. Тогда интегрируя (3) два раза, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\wp\right)^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3); \tag{4}$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_3 < e_2 < e_1.$$

Здесь e_1, e_2, e_3 — постоянные интегрирования.

(4) — определяющее уравнение эллиптической функции Вейерштрасса $\wp$, имеющей два периода на комплексной плоскости x: действительный

(длина волны п.в.) $2\Omega_1$ и чисто мнимый $2\Omega_2$:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} K\left(\sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}\right), \quad \Omega_2 = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} K\left(\sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}\right) \tag{5}$$

$$e_2 = \wp(\Omega_1 + \Omega_2), \quad e_3 = \wp(\Omega_2).$$

Здесь K — полный эллиптический интеграл. Из (5), (4) видно, что если пользоваться стандартным видом $\wp$, то нужно положить $\alpha = \Omega_2$. Тогда $\wp(x + \Omega_2)$ при действительных e, x действительна и колеблется с периодом $2\Omega_1$ между e_3 и e_2, так что $e_2 - e_3$ можно считать удвоенной амплитудой п.в.

Из условия, что среднее по x от F равно нулю, находим u как функцию от e:

$$u = \frac{\sigma}{\Omega_1} \int\limits_0^{2\Omega_1} \wp\,(x + \Omega_2)\, dx. \tag{6}$$

Разность $\Delta_1 = u + k_0^2$ между фазовыми скоростями п.в. и линейной волны с тем же волновым числом $k_0 = \pi / \Omega_1$ является мерой нелинейности п.в.

При $\Delta_1 \ll k_0^2$ п.в. считаем слабонелинейной, в противном случае — существенно нелинейной. К существенно нелинейным п.в. относится и солитон — уединенная волна, у которой $e_1 - e_2 = 0$, $k_0 = 0$, $u = 12$, $e_2 > 0$.

4. Пусть теперь вдоль x бежит п.в. $F(x - ut)$ а z — бесконечно малые колебания, взаимодействующие с F через нелинейный член в (1). Подставляя $v = F + z$, линеаризуя относительно z и проведя преобразование Фурье, получим из (1), (2).

$$(\omega - \omega_\mathbf{k})\, z_\varkappa = k_x \int F_{\varkappa'} z_{\varkappa - \varkappa'} d\varkappa', \quad \omega_\mathbf{k} \equiv -k_x^3 \pm k_y^2 / (2k_x). \tag{7}$$

Здесь $\varkappa$ — совокупность $(\mathbf{k}, \omega)$; $d\varkappa \equiv d\mathbf{k}\, d\omega$. Легко видеть, что Фурье-образ п.в. в (7) с основными волновым вектором $\mathbf{k}_0$ и частотой $\omega_0 = uk_0$ имеет вид

$$F_\varkappa = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\varkappa - n\varkappa_0), \quad F_0 = 0; \quad \varkappa_0 \equiv (\mathbf{k}_0, \omega_0). \tag{8}$$

Здесь F_n — коэффициенты ряда Фурье, в который разлагается п.в. Для слабонелинейной п.в. коэффициенты с $n = \pm 1$ много больше остальных. Для существенно нелинейной п.в. коэффициенты с $|n| < N$, где N — большое число, одного порядка величины, остальные малы.

Подставляя (8) в (7), получим

$$(\omega - \omega_\mathbf{k})\, z_\varkappa = k_x \sum F_n z_{\varkappa - n\varkappa_0}. \tag{9}$$

Отсюда видно, что наибольшую амплитуду имеют собственные колебания, т. е. те $z_\varkappa$, у которых разность в скобке (9) мала. Пусть (9) описывает взаимодействие собственного колебания $z_\varkappa$ с п.в. В сумму (9) может входить член с $n = s$, в котором $z_{\varkappa - s\varkappa_0}$ также является собственным колебанием. Для него уравнение (9) имеет вид

$$(\omega - s\omega_0 - \omega_{\mathbf{k} - s\mathbf{k}_0})\, z_{\varkappa - s\varkappa_0} = (k_x - sk_0) \sum F_n z_{\varkappa - (s+n)\varkappa_0}. \tag{10}$$

Для того чтобы скобка в левой части (10) была малой одновременно со скобкой в (9), необходимо условие $\omega_\mathbf{k} = s\omega_0 + \omega_{\mathbf{k} - s\mathbf{k}_0}$. Так как $\mathbf{k}_0$ направлен вдоль x,

$$\omega_0 = uk_0, \quad \omega_{\mathbf{k} - s\mathbf{k}_0} = -(k_x - sk_0)^3 \pm \frac{k_y^2}{2(k_x - sk_0)},$$

то это условие эквивалентно равенству:

$$6k_x(sk_0 - k_x) = \Delta_s + \sqrt{\Delta_s^2 \mp 6k_y^2}; \qquad (11)$$
$$\Delta_s \equiv u + (sk_0)^2, \quad s = 1, 2, 3\ldots$$

Случай отрицательного знака перед корнем в (11) неинтересен, так как он соответствует устойчивым возмущениям (см. формулу (13)). Найдя действительный вектор k, удовлетворяющий (11), можно считать, что в суммах (9), (10) отличны от нуля только собственные колебания $z_\varkappa$ и $z_{\varkappa - s\varkappa_0}$. Тогда (9), (10) сводятся к однородной системе с двумя неизвестными

$$(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) z_\varkappa = k_x F_s z_{\varkappa - s\varkappa_0}, \qquad (12)$$
$$(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) z_{\varkappa - s\varkappa_0} = (k_x - sk_0) F_{-s} z_\varkappa.$$

Условие разрешимости (12) с учетом (11) имеет вид

$$(\omega - \omega_k)^2 = -\frac{1}{6}(\Delta_s + \sqrt{\Delta_s^2 \mp 6k_y^2})\,|F_s|^2. \qquad (13)$$

Из (11), (13) видно, что в средах с положительной дисперсией, т. е. при нижнем знаке под корнем (13), всегда найдется такое k, что правая часть (13) будет отрицательной. Это значит, что п. в. в такой среде распадается.

В средах с отрицательной дисперсией п.в. также распадается при $6k_y^2 < \Delta_s^2$, поскольку все Δ_s положительны. Однако Δ_1 — нелинейный прирост фазовой скорости для слабонелинейных п.в. — пропорционален квадрату амплитуды п.в., а при $s > 1$ малы $|F_s|^2$, так что инкремент распада слабонелинейных п.в. пропорционален квадрату амплитуды. Существенно нелинейные п.в. распадаются с инкрементом, пропорциональным отношению амплитуды к длине волны.

При $e_2 \to e_1$ основная длина волны п.в. стремится к бесконечности, $k_0 \to \to 0$ и при этом $F_n \to 0$, а выражение п.в. через ряд Фурье переходит в интеграл Фурье. Иными словами, п.в. переходит в солитон. Как видим, при этом правая часть (13) стремится к нулю, так что солитон устойчив относительно трехволновых процессов — распадов, которые рассматриваются в данной работе.

Солитон может быть неустойчив только относительно локализованных около себя возмущений ([10]), когда между Фурье-компонентами z существует сильная связь. Эта связь теряется при ограничении числа рассматриваемых волн в (9), (10) двумя, которые остаются в (12). Сравнение с результатами ([10]) показывает, что при стремлении п.в. к солитону вывод о неустойчивости волны конечной амплитуды качественно сохраняет силу для среды с отрицательной дисперсией, но не может быть перенесен на среду с положительной дисперсией.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова
Москва

Поступило
14 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. З. Сагдеев, Вопросы теории плазмы, 4, 20 (1964). [2] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett., 15, 240 (1965). [3] Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, 103, 193 (1971). [4] В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ, 32, 1291 (1962). [5] Б. Б. Кадомцев, Вопросы теории плазмы, 4, 188 (1964). [6] Л. А. Островский, ЖЭТФ, 51, 1189 (1966). [7] В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Труды II Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1966. [8] С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93, 19 (1967). [9] В. И. Карпман, Е. М. Крушкаль, ЖЭТФ, 55, 530 (1968). [10] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ДАН, 192, 753 (1970).