

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

В. А. ТРЕНОГИН

**ПРИБЛИЖЕНИЯ НА СЕМЕЙСТВАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ
И РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком В. С. Владимировым 25 V 1971)

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, A — линейный оператор с областью определения $D(A) = D$, плотной в E_1 , и с областью значений $R(A) \subseteq E_2$. Пусть $h \in E_2$. Рассмотрим уравнение

$$Ax = h. \quad (1)$$

Исследование вопросов существования и единственности его решения довольно часто удается провести на основе анализа приближенных уравнений. Отметим здесь: 1) восходящие к Л. А. Люстернику доказательства разрешимости задач для дифференциальных уравнений с помощью приближений их разностными задачами (¹⁻⁹), 2) теорию приближенных методов Л. В. Канторовича и близкие к ней проекционные методы (^{10, 11}), 3) метод продолжения по параметру Шаудера (¹²), 4) теоремы о последовательностях полугрупп и эволюционных уравнений (¹³⁻¹⁶).

В заметке приближенные уравнения рассматриваются на семействах банаховых пространств (ср. (^{10, 15, 17})), что позволяет получать аналогичные результаты с единой общей точки зрения.

Пусть Σ — некоторое множество комплексных или вещественных чисел τ , для которого точка $\tau = 0$ является предельной. Рассмотрим семейство банаховых пространств $E(\tau)$, $\tau \in \Sigma$, а также банахово пространство E . Пусть дано семейство линейных ограниченных операторов (эпиморфизмов) $T(\tau)$, $\tau \in \Sigma$, таких, что при данном τ $T(\tau)$ отображает E на $E(\tau)$ ($T(\tau)E = E(\tau)$). Пусть, наконец, $x(\tau)$ — семейство элементов: $x(\tau) \in E(\tau)$, $\tau \in \Sigma$. Элемент $x \in E$ назовем T -пределом $x(\tau)$ (при $\tau \rightarrow 0$), если $\|x(\tau) - T(\tau)x\|_\tau \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ (краткая запись $x(\tau) \rightarrow x$).

Если $E(\tau) = E/E_\tau$ (фактор-пространства), где E_τ , $\tau \in \Sigma$, — семейство подпространств в E , то за $T(\tau)$ можно принять естественные гомоморфизмы E на $E(\tau)$ и T -сходимость — это фактор-сходимость (¹⁵). С другой стороны, пусть $N[T(\tau)]$ — подпространство нулей оператора $T(\tau)$, тогда $E/N[T(\tau)]$ изоморфно $E(\tau)$ и $T(\tau)$ порождает естественный гомоморфизм E на $E(\tau)$. Таким образом, излагаемая схема эквивалентна фактор-методу, что позволяет сохранить и использовать его понятия и результаты (Н. Н. Гудович (¹⁵), гл. 5, § 1).

Будем говорить, что нормы в $E(\tau)$ (см. (^{17, 15})): а) невырождены, если из $T(\tau)x \rightarrow 0$ следует, что $x = 0$, б) согласованы с нормой в E , если $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|T(\tau)x\|_\tau = \|x\|$, в) равномерно ограничены, если найдутся $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что $\|T(\tau)\| \leq C$ при $|\tau| < \delta$, г) естественные, если $\|x(\tau)\|_\tau = \inf_{x \in x(\tau)} \|x\|$ (запись $x \in x(\tau)$ означает, что $T(\tau)x = x(\tau)$).

Отметим, что из б) следуют а) и в), а из г) следует в). Всюду ниже предполагается единственность T -предела, для чего а) достаточно, а при наличии г) необходимо. Приведенные обозначения и определения будут применяться ниже к пространствам E_i , $E_i(\tau)$ и операторам $T_i(\tau)$, $i = 1, 2$; $\tau \in \Sigma$.

Пусть теперь D — линейное многообразие в E_1 и $A(\tau)$ при каждом фиксированном $\tau \in \Sigma$ есть линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с областью определения $D[A(\tau)] \subseteq E_1(\tau)$, обладающей следующим свойством: при $x \in D$ $T_1(\tau)x \in D[A(\tau)]$, и с областью значений из $E_2(\tau)$. Будем говорить, что семейство $A(\tau)$, $\tau \in \Sigma$, сильно T -сходится на D к линейному оператору A с $D(A) = D$ (аппроксимирует A на D), если для $x \in D$ $\|A(\tau)T_1(\tau)x - T_2(\tau)Ax\|_\tau \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ (краткая запись $A(\tau) \rightarrow A$ на D). Будем говорить, что выполнено условие устойчивости, если существуют $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $|\tau| < \delta$, $\tau \in \Sigma$, существуют и ограничены $A^{-1}(\tau)$, причем $\|A^{-1}(\tau)\| \leq M$.

Рассмотрим теперь наряду с уравнением (1) приближенное уравнение

$$A(\tau)x(\tau) = T_2(\tau)h. \quad (2)$$

Лемма 1. Пусть в $E_1(\tau)$ нормы невырождены, $A(\tau) \rightarrow A$ на D , плотно в E_1 , и выполнено условие устойчивости, тогда на $R(A)$ существует A^{-1} и $A^{-1}(\tau) \rightarrow A^{-1}$ на $R(A)$. Если, кроме того, в $E_1(\tau)$ нормы равномерно ограничены, в $E_2(\tau)$ нормы согласованы с нормой в E_2 , то $A^{-1}(\tau) \rightarrow A^{-1}$ на $\overline{R(A)}$ и оператор A^{-1} ограничен как оператор из $R(A)$ в E_1 .

Доказательство следует схеме В. П. Маслова ((¹¹), стр. 86), которому принадлежит аналогичное утверждение для частного случая $E_i(\tau) = E_i$, $i = 1, 2$.

В лемме $\overline{A^{-1}}$ — расширение A^{-1} по непрерывности на $\overline{R(A)}$. Если $h \in R(A)$, то назовем элемент $\overline{A^{-1}h}$ обобщенным решением уравнения (1). Всякое решение (1) является также и его обобщенным решением. Лемма 1 утверждает, что если (1) имеет обобщенное решение x , то оно единственно, а приближенное решение (т. е. решение уравнения (2)) $x(\tau) \rightarrow x$.

Перейдем к выяснению условий существования решений уравнения (1). Здесь важную роль играет перенесение на рассматриваемый случай понятий ограниченности, компактности и полной непрерывности. В разностной задаче об аппроксимации оператора Лапласа это было сделано Л. А. Люстерником ((²)). Рассмотрим при фиксированном $\tau \in \Sigma$ множество $X(\tau)$ элементов $x(\tau) \in E(\tau)$, а затем семейство таких множеств $\mathfrak{M} = \{X(\tau)\}$, где $\tau \in \Sigma' \subseteq \Sigma$ и $\tau = 0$ — предельная точка для Σ' .

Семейство $\mathfrak{M}$ назовем T -ограниченным, если существуют постоянные $C > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для $x(\tau) \in X(\tau)$ при $\tau \in \Sigma'$, $|\tau| < \delta$ $\|x(\tau)\|_\tau \leq C$.

Семейство $\mathfrak{M}$ назовем T -компактным, если для любой последовательности $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$, $\tau_n \in \Sigma'$, $\tau_n \rightarrow 0$ и любых $x(\tau_n) \in X(\tau_n)$ существует T -сходящаяся последовательность $\{x(\tau_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ (т. е. найдется $x \in E$ такой, что $x(\tau_{n_k}) - T(\tau_{n_k})x \|_{\tau_{n_k}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$).

Семейство линейных операторов $B(\tau)$, $\tau \in \Sigma$, действующих из $E_1(\tau)$ в $E_2(\tau)$, назовем T -вполне непрерывным, если оно переводит каждое T_1 -ограниченное в $E_1(\tau)$ семейство $\mathfrak{M}$ в семейство T_2 -компактное.

Лемма 2. Пусть существует $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ($\tau = 0$ — предельная точка Σ') такое, что при $\tau \in \Sigma'$: 1) нормы в $E_1(\tau)$ естественные, а в $E_2(\tau)$ согласованы с нормой в E , 2) $A(\tau) \rightarrow A$ на E_1 , 3) существует $A^{-1}(\tau)$ и $A^{-1}(\tau)T_2(\tau)h \rightarrow x$, тогда x — решение (1).

Лемма эта, по существу, принадлежит Н. Н. Гудовичу ((¹⁵), стр. 413), с ее помощью устанавливается следующее предложение.

Теорема 1. Пусть 1) нормы в $E_1(\tau)$ естественные, а в $E_2(\tau)$ согласованы с нормой в E_2 , 2) семейство $\mathfrak{M} = \{Y(\tau)\}$, где $Y(\tau) = A(\tau)T_1(\tau)E_1$, T_2 -компактно, 3) найдется линейное многообразие $\mathcal{H} \subseteq E_2$ такие, что семейство $\mathfrak{N} = \{X(\tau)\}$, где $X(\tau) = A^{-1}(\tau)T_2(\tau)\mathcal{H}$ T_1 -компактно, тогда уравнение (1) имеет при $h \in \mathcal{H}$ по крайней мере одно решение.

Следствие 1. Если дополнительно (к условиям леммы 2 или теоремы 1): 1а) нормы в $E_2(\tau)$ естественные, а нормы в $E_1(\tau)$ согласованы

с нормой в E_1 , 2а) выполнено условие устойчивости, то решение x единственно и приближенно решение $x(\tau) \rightarrow x$.

Следствие 2. Если в условиях теоремы 1 (и следствия 1) $\mathcal{H} = E_2$, то уравнение (1) имеет (единственное) решение при любом $h \in E_2$. Если же $\mathcal{H} = E_2$, то (1) имеет (единственное) обобщенное решение для любого $h \in E_2$.

Следующая теорема охватывает и случай неограниченных операторов A .

Теорема 2. Пусть 1) в $E_2(\tau)$ нормы согласованы с нормой в E_2 , 2) $A(\tau) \rightarrow A$ на D , плотно в E_1 , 3) существует последовательность $\{\tau_n\} \in \Sigma$, $\tau_n \rightarrow 0$, такая, что $A^{-1}(\tau_n)$ существуют, ограничены и $A^{-1}(\tau_n)T_2(\tau_n)h \rightarrow x \in D$, 4) $\|A^{-1}(\tau_n)T_2(\tau_n)h - T_1(\tau_n)x\|_{\tau_n} = o(\|A(\tau_n)\|^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда x — решение уравнения (1).

С помощью леммы 1 нетрудно выяснить и условия единственности решения.

Будем ниже говорить, что банахово пространство F вложено в банахово пространство E , если указан линейный ограниченный оператор J (оператор вложения F в E) такой, что его область определения $D(J) = F$, нуль-подпространство $N(J) = \{0\}$ и область значений плотна в E .

Теорема 3. Пусть 1) F вложены в E_i , а $F_i(\tau) \rightarrow F_i$ в $E_i(\tau)$, $i = 1, 2$, причем семейство операторов вложения $F_1(\tau)$ в $E_1(\tau)$ T - вполне непрерывно, 2) в $E_1(\tau)$ нормы естественные; а в $E_2(\tau)$ согласованы с нормой в E_2 , 3) при $h \in F_2$ $T_2(\tau)h \in F_2(\tau)$, 4) оператор A действует из E_1 в E_2 , а также из F_1 в F_2 , при $\tau \in \Sigma$ оператор $A(\tau)$ действует из $E_1(\tau)$ в $E_2(\tau)$, а также из $F_1(\tau)$ в $F_2(\tau)$, 5) $A(\tau) \rightarrow A$ на E_1 , 6) при $\tau \in \Sigma$, $|\tau| < \delta$ существуют $A^{-1}(\tau)$ и $\|A^{-1}(\tau)\|_{F_1(\tau) \rightarrow F_2(\tau)} \leq C$, где $\delta > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные.

Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение x (только одно в F_1) при $h \in F_2$. Если, кроме того, выполнены условия 1а) и 2а) следствия 1, то при $h \in F_2$ решение единственно, а для любого $h \in E_2$ существует единственное обобщенное решение x и $x(\tau) \rightarrow x$.

Подобные результаты для граничных эллиптических задач лежат в основе метода продолжения по параметру Шаудера.

В заключение проиллюстрируем на простейшем примере понятие T -компактности в применении к разностным задачам. Пусть G — ограниченная область в s -мерном евклидовом пространстве R^s переменной $x = (x_1, \dots, x_s)$, а $E = C(G)$ — пространство непрерывных функций. Разобьем R^s плоскостями $x_i = k_i\tau$ ($k_i, i = 1, \dots, s$ — натуральные числа), $\tau \in (0, \tau_0) = \Sigma$ на параллелепипеды и обозначим через G_τ множество точек сетки, лежащих в G . Линейное пространство сеточных функций $u_\tau(x)$, $x \in G_\tau$ при фиксированном $\tau \in \Sigma$ превратим в банахово пространство $E(\tau)$, положив $\|u_\tau\|_\tau = \max_{x \in G_\tau} |u_\tau(x)|$. Эти нормы естественные и согласованы с

нормой в E . Если $f(x) \in E$, то положим $T(\tau)f(x) = f_\tau(x) \in E(\tau)$, где $f_\tau(x) = f(x)$ при $x \in G_\tau$.

Пусть $\mathfrak{M}_\tau$ — некоторое множество сеточных функций из $E(\tau)$. Для T -компактности семейства $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{M}_\tau\}$ необходимо и достаточно, чтобы 1) семейство $\mathfrak{M}$ было T -ограничено, 2) семейство $\mathfrak{M}$ было τ -равностепенно непрерывно по Л. А. Люстернику (см. ⁽²⁾): для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $\tau \in (0, \delta)$ $\max_{1 \leq i \leq s} |\Delta_i u_\tau(x)| < \varepsilon$ ($\Delta_i u_\tau$ — первая разность u_τ по x_i).

Если вместо условия 2) выполнено условие 2') $\max_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq s} |\Delta_{i_1 \dots i_k} u_\tau(x)| \leq C \cdot k$, $k = 1, \dots, l+1$ ($\Delta_{i_1 \dots i_k} u_\tau$ — k -я разность u_τ), существует последовательность $\tau_n \rightarrow 0$ такая, что $u(\tau_n)$ T -сходится к l раз непрерывно дифференцируемой функции $u(x)$. (Об аналогичных результатах в прост-

ранствах суммируемых функций см. (8), гл. 6.) Два других способа введения оператора $T(\tau)$ в разностных задачах — это уже упоминавшийся фактор-метод и проекционные методы, когда $T(\tau)$ проектор.

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР Л. А. Люстернику за полезное обсуждение работы.

Московский физико-технический институт
г. Долгопрудный

Поступило
24 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. А. Люстерник, УМН, в. 8, 115 (1941). ² Л. А. Люстерник, УМН, 9, в. 2, 3 (1954). ³ И. Г. Петровский, УМН, в. 8, 107, 161 (1941). ⁴ Р. Курант, К. Фридрихе, Г. Леви, УМН, в. 8 (1940). ⁵ E. Rothe, Math. Ann., 104, 340 (1931). ⁶ А. Н. Тихонов, Бюлл. Московск. унив., сер. А, 1, в. 9 (1938). ⁷ Д. М. Эйдуc, ДАН, 83, № 2 (1952). ⁸ О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953. ⁹ О. А. Ладыженская, Матем. сборн., 39, 1 (1956). ¹⁰ Л. В. Канторович, УМН, 3, в. 6 (1948). ¹¹ М. А. Красносельский и др., Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1969. ¹² Л. Берс, М. Шехтер, Ф. Джон, Уравнения с частными производными, М., 1967. ¹³ К. Иосида, Функциональный анализ, М., 1967. ¹⁴ В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965. ¹⁵ С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967. ¹⁶ Ш. И. Ибрагимов, Дифференциальные уравнения, 5, № 4 (1969). ¹⁷ А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, М., 1971.