Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 6

МАТЕМАТИКА

Г. Л. ЧЕРНЫШОВ

О НЕРАВЕНСТВЕ ФРИДРИХСА — ЛЕВИ ДЛЯ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 V 1971)

Изучение задачи Коши для общих гиперболических уравнений и систем было начато И. Г. Петровским ([1]), который дал и общее определение гиперболичности. Существенный вклад в развитие теории гиперболических уравнений внес Ж. Лере ([2]), который ввел понятие разделяющего оператора, что позволило в билинейных дифференциальных формах выделить знакоопределенную часть и получить для решения задачи некоторые неравенства, непосредственным следствием которых являются теоремы существования и единственности. Дальнейшее развитие теории гиперболических уравнений получило освещение в ряде работ Л. Гординга (см., например, ([3], [4])).

Целью настоящей статьи является получение обобщенного неравенства Фридрихса — Леви для гиперболических операторов с сингулярным оператором Бесселя.

Пусть E^{++}_{n+2} — эвклидово пространство точек
$(x_0;\ x_1;\ldots;\ x_n;\ x_{n+1}) = (x_0;\ x';\ x_{n+1}) = (x_0;\ x),\quad x_0 \geqslant 0,\quad x_{n+1} \geqslant 0.$
Переменная x_0 играет роль времени t. Пусть $V = V_t$ обозначает полосу $0 \leqslant x_0 \leqslant t$, а $S = S_t$ — плоскость $x_0 = t$. Положим

$$D_B^\alpha = D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} B_{n+1}^{\alpha_{n+1}},\qquad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},\qquad j = 0,\ldots, n+1;$$

$$B_{n+1} = \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} + \frac{k}{x_{n+1}}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} = \frac{1}{x_{n+1}^k} D_{n+1}(x_{n+1}^k D_{n+1});$$

$$|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_n + 2\alpha_{n+1}.$$

Пусть

$$a = a(x_0, x; D_B) = \sum a_\alpha(x_0, x) D_B^\alpha,\qquad |\alpha| \leqslant 2m, \tag{1}$$

— дифференциальный оператор порядка $2m$,

$$a_0(x_0, x; D_B) = \sum a_\alpha(x_0, x) D_B^\alpha,\qquad |\alpha| = 2m, \tag{2}$$

— его главная часть $h(x_0, x)$ — коэффициент при D_0^{2m}. Условимся называть a нормальным, если $h(x_0, x) \equiv 1$ для всех (x_0, x).

К классу функций C_B^N отнесем функции, непрерывно дифференцируемые N раз по переменным (x_0, x') и непрерывно выдерживающие по x_{n+1} применение оператора $B_{n+1}^{N/2}$ в случае четного N и оператора $D_{n+1}B_{n+1}^{N-1/2}$ в случае нечетного N. Относительно коэффициентов $a_\alpha(x_0, x)$ оператора a предположим, что все они действительные и имеют нужную гладкость. Пусть $(\xi_0;\ \xi_1;\ldots;\ \xi_n;\ \xi_{n+1}) = (\xi_0;\ \xi';\ \xi_{n+1}) = \xi$ — двойственные переменные и

$$a_0(x_0,\ x;\ \xi) = \sum a_\alpha(x_0,\ x)\cdot\xi^\alpha,\quad |\alpha| = 2m, \tag{3}$$

— символ оператора a.

Будем называть оператор a B-гиперболическим (относительно первой координаты x_0), если для всех (x_0, x) и действительных $\xi \neq 0$

$$a_0(x_0, x; \xi) = h(x_0, x) \prod_{j=1}^{2m} (\xi_0 - \lambda_j) \quad (h(x_0, x) \neq 0), \tag{4}$$

где $\lambda_j = \lambda_j(x_0, x; \xi', \xi_{n-1})$ действительны и различны.

Пусть a и b — два B-гиперболических оператора порядка $2m$ и $2m-1$ соответственно. Будем говорить, следуя (2), что b разделяет a, если для всех (x_0, x) и ξ корни b разделяют корни a. Если задан нормальный B-гиперболический оператор a, то для нахождения нормального B-гиперболического оператора b, разделяющего a, достаточно положить, например, $b = b_0$ и

$$b_0(x_0, x; \xi) = \frac{1}{2m} \frac{\partial a_0(x_0, x; \xi)}{\partial \xi_0}. \tag{5}$$

Приведем формулировки двух лемм, которые используются в дальнейшем. Первая основана на идее Лере [2], а вторая является классической.

Пусть $s > 0$ и пусть

$$P(\zeta) = \prod_{k=1}^{2m} (\zeta - i\lambda_k s), \quad Q(\zeta) = \sum_{k=1}^{2m-1} (\zeta - i\mu_k s)$$

— полиномы. Предположим, следуя Лере, что числа $\langle \mu_k \rangle_1^{2m-1}$ разделяют числа $\langle \lambda_k \rangle_1^{2m}$, т. е. $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \ldots < \mu_{2m-1} < \lambda_{2m}$ при соответствующей нумерации.

Лемма 1. *Пусть f — некоторая $2m$ раз дифференцируемая функция действительного переменного t.*

Тогда тождество

$$\mathrm{Re}[P(D)f \cdot \overline{Q(D)f}] = DL(f) \quad (D = d/dt) \tag{6}$$

определяет эрмитову положительно определенную форму L от производных $\langle D^k f \rangle_0^{2m-1}$ такую, что

$$L(f) \geqslant C \sum |D^k f|^2 \cdot s^{4m-2k-2}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2m-1, \tag{7}$$

где C — непрерывная положительная функция чисел $\langle \lambda^k \rangle_1^{2m}$ и $\langle \mu^k \rangle_1^{2m-1}$, не зависящая от f и от s.

Лемма 2. *Пусть $z(t)$ и $\rho(t)$ — две неотрицательные функции, определенные на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Предположим далее, что z интегрируема, а ρ не убывает.*

Тогда неравенство

$$z(t) \leqslant C \int_0^t z(s)\, ds + \rho(t) \quad (c > 0 \text{ — постоянная}) \tag{8}$$

влечет

$$z(t) \leqslant e^{Ct} \rho(t). \tag{9}$$

Пусть

$$\Phi(f, g) = \sum A_{\alpha\beta}(x_0, x)\, D_B^\alpha f \cdot D_B^\beta g$$

— билинейная форма от производных функций f и g. Будем говорить, что порядок формы $\Phi(f, g)$ в точке (x_0, x) равен ν, ν', если в правой части ее $|\alpha| \leqslant \nu$, $|\beta| \leqslant \nu'$ и найдется по крайней мере один коэффициент, у которого $|\alpha| = \nu$, и один коэффициент, у которого $|\beta| = \nu'$, не обращающиеся в нуль в данной точке.

Пусть

$$a = \sum a_\alpha(x_0, x)\, D_B^\alpha, \quad |\alpha| \leqslant 2m,$$

— нормальный B-гиперболический дифференциальный оператор и пусть

$$b = \sum b_\beta (x_0, x) D_B^\beta, \quad |\beta| \leqslant 2m - 1,$$

— разделяющий B-гиперболический оператор, построенный по a (см. формулу (5)).

Используя операторы a и b, построим эрмитову форму

$$M(f, g) = af \cdot \overline{bg} + bf \cdot \overline{ag}; \tag{10}$$

ясно, что

$$M(f, f) = M(x_0, x; f) = 2\mathrm{Re}\,[af \cdot \overline{bf}].$$

Доказывается, что правая часть равенства (10) допускает дивергентное представление в виде

$$M(f,g) = \sum_{j=0}^{n} D_j \Phi^{(j)}(f,g) + \frac{1}{x_{n+1}^k} D_{n+1} \Phi^{(n+1)}(f,g) + \Psi(f,g), \tag{11}$$

где $\Phi^{(j)}(f, g)$, $j = 0, \ldots, n+1$, и $\Psi(f, g)$ — эрмитовы формы от производных функций f и g порядка не выше $2m-1$, $2m-1$.

Через $a_0(X_0, X; D_B)$ и $b_0(X_0, X; D_B)$ будем обозначать главные части операторов a и b с фиксированными коэффициентами в точке (X_0, X); тогда

$$\mathrm{Re}\,[a_0(X_0, X; D_B) f \cdot \overline{b_0(X_0, X; D_B) f}] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} D_j \Phi^{(j)}(X_0, X; f) + \frac{1}{x_{n+1}^k} D_{n+1} \Phi^{(n+1)}(X_0, X; f), \tag{12}$$

где $\Phi^{(j)}(X_0, X; f)$, $j = 0, \ldots, n+1$,— эрмитовы однородные формы от производных f и g порядка $2m-1$, $2m-1$.

Л е м м а 3. *Пусть a — нормальный B-гиперболический оператор и пусть $\Phi^{(0)}(X_0\ X; D_B)$ определено формулой* (12). *Существует постоянная $C > 0$, зависящая только от оператора a, такая, что*

$$\int \Phi^{(0)}(X_0, X; f) \cdot x_{n+1}^k dS_t \geqslant C \int \sum |D_B^\alpha f|^2 \cdot x_{n+1}^k dS_t \quad (|\alpha| = 2m) \tag{13}$$

для всех t, всех (X_0, X) и всех $f \in C_B^{2m-1}$, где $dS_t = dx_2 \ldots dx_{n+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится с помощью преобразования Фурье — Бесселя, равенства Парсеваля для этого преобразования и леммы 1.

Введем следующие обозначения:

$$|D_B^\varkappa f(x_0, x)|^2 = \sum |D_B^\alpha f(x_0, x)|^2, \quad |\alpha| \leqslant \varkappa,$$

$$|D_B^\varkappa f, S_t|^2 = \int |D_B^\alpha f(x_0 = t, x)|^2 \cdot x_{n+1}^k dS_t. \tag{14}$$

Локальная положительность (13) формы $\Phi^{(0)}(X_0, X; f)$ позволяет доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Пусть a — нормальный B-гиперболический оператор и пусть $\Phi^{(0)}$ определено формулой* (11).

Тогда существует постоянная $C > 0$, зависящая только от оператора a, такая, что

$$\int \Phi^{(0)}(x_0, x; f) \cdot x_{n+1}^k dS_t \geqslant C^{-1} |D_B^{2m-1} f, S_t|^2 - C |D_B^{2m-2} f, S_t|^2. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы использует разложение единицы и теоремы вложения для весовых классов, полученные в ([5]). Теорема 1 допускает обобщение.

Введем некоторые новые обозначения. Кроме полного порядка производной $D_B{}^\alpha$, равного $|\alpha| = \alpha_0 + \ldots$, будем использовать двойной порядок

$[\alpha]=i, j$, где i — порядок дифференцирования по x_0, а j — порядок дифференцирования по остальным переменным. Запись $[\alpha] \leqslant p, q$ означает, что $i \leqslant p$ и $i+j \leqslant p+q$. Помимо обозначений (14), введем следующие:

$$| D_B^{p,q} f(x_0, x)|^2 = \sum | D_B^{\alpha} f(x_0, x)|^2, \quad [\alpha] \leqslant p, q,$$

$$| D_B^{p,q} f, S_t|^2 = \int | D_B^{p,q} f(x_0 = t, x)|^2 \cdot x_{n+1}^k dS_t. \tag{16}$$

Рассмотрим скалярное произведение, определяемое по формуле

$$D_B^{p,q}(f, g) = \sum D_B^{\gamma} f \cdot \overline{D_B^{\gamma} g}, \quad [\gamma] \leqslant p, q. \tag{17}$$

Доказывается дивергентное представление для форм более общего вида, а именно:

$$\operatorname{Re}[D_B^{p,q}(af, bf)] =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} D_j \Omega^{(j)}(x_0, x; f) + \frac{1}{x_{n+1}^k} D_{n+1} \Omega^{(n+1)}(x_0, x; f) + \chi(x_0, x; f), \tag{18}$$

где $\Omega^{(j)}$, $j = 0, \ldots, n+1$, и χ — эрмитовы формы от производных функций f и $\bar{f}$ порядка не выше $2m+p-1, q$; $2m+p-1, q$.

Теорема 2. *Пусть a — нормальный B-гиперболический оператор и пусть* $\Omega^{(0)}(x_0, x; f)$ *определяется посредством* (18).

Тогда

$$\int \Omega^{(0)}(x_0, x; f) \cdot x_{n+1}^k dS_t \geqslant C^{-1} | D_B^{2m+p-1,q} f, S_t|^2 - C | D_B^{2m+p-2,q} f, S_t|^2$$

для всех t и всех $f \in C_B^{2m+p+q-1}$, где $C > 0$ зависит только от оператора a.

Введем две нормы:

$$| D_B^{p,q} f, V_t|_1 = \int_0^t | D_B^{p,q} f, S_t| \, d\tau,$$
$$\tag{19}$$
$$| D_B^{p,q} f, V_t|_\infty = \sup | D_B^{p,q} f, S_t|, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Теорема 3. *Пусть a — нормальный B-гиперболический оператор порядка $2m$.*

Тогда имеет место неравенство

$$| D_B^{2m+p-1,q} f, V_t|_\infty \leqslant$$
$$\tag{20}$$
$$\leqslant C [|D_B^{2m-1,\, p+q} f, S_0| + | D_B^{p-1,q} af, S_0| + | D_B^{p,q} af, V_t|_1],$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от оператора a. При $p = 0$ второй член правой части отсутствует. Доказательство теоремы использует лемму 2 и теорему 2.

Автор выражает свою искреннюю признательность проф. И. А. Киприянову за постоянное внимание к работе.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
12 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Матем. сборн., 2 (44) (1937). [2] J. Leray, Hyperbolic Differential Equations, Princeto, 1952. [3] Л. Гординг, Сборн. пер. Математика **2**, 1, 81 (1958). [4] Л. Гординг, Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, 1961. [5] И. А. Киприянов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **89**, 130 (1967).