Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 6

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

М. А. ШТАНЬКО

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕНГЕРА В КЛАССЕ КОМПАКТОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 V 1971)

1. Доказательство универсальности компактов Менгера. К. Менгер построил компакты M_r^n, $r < n$, лежащие в эвклидовом пространстве E^n, $\dim M_r^n = r$, и предположил, что для любого r-мерного множества $X \subset E^n$ существует гомеоморфизм $f\colon X \to M_r^n$ (1). В этой статье задача Менгера решается в классе компактов.

Теорема 1. *Для любого компакта K в E^n существует гомеоморфизм $f\colon K \to M_r^n$, $r = \dim K$.*

Доказательство. 1) Согласно аппроксимационной теореме из (7), если $\dim K \leqslant n - 3$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует гомеоморфизм f_ε: $K \to E^n$, $\rho(1, f_\varepsilon) < \varepsilon$, такой, что $E^n \setminus f_\varepsilon(K)$ обладает свойством 1-ULC. 2) Согласно основной теореме из (5, 6), если $\dim K \leqslant n - 3$ и $E^n \setminus K$ обладает свойством 1-ULC, $n \geqslant 5$, то $\dim K = \operatorname{dem} K$, где $\operatorname{dem} K$ означает размерность вложения компакта K в E^n (6). В дальнейшем мы будем пользоваться двойственной размерностью вложения $\operatorname{Dem} K$. В (6) доказано, что $\operatorname{dem}\ K = \operatorname{Dem} K$.

3) Условие $\operatorname{Dem} K = r$ необходимо и достаточно для того, чтобы существовала изотопия E^n, переводящая K в M_r^n, где $r = \dim K$. Это утверждение доказывается в настоящей статье, см. п. 5.

Итак, если K — компакт в E^n, $\dim K = r \leqslant n - 3$, $n \geqslant 5$, то существует гомеоморфизм $f\colon K \to M_r^n$. Случаи $\dim K = n - 2$, $n - 1$, рассмотрены Боте (4). Универсальность кривой Менгера M_1^3 была доказана самим Менгером. В общем случае универсальность M_r^n, $2r + 1 \leqslant n$, была доказана Лефшецом (2).

2. Построение компактов Менгера. Пусть M^n — правильный n-мерный куб в E^n. Через M^r, $r \leqslant n$, обозначим его r-мерные грани, через $P^r(M^n)$ — объединение замкнутых r-мерных граней. Обозначим $A_0(M^n)$ объединение центров всех $(r + 1)$-граней куба M^n. Центры, лежащие на противоположных $(r + 1)$-гранях каждого куба M^{r+2}, соединим прямолинейными отрезками и объединение таких отрезков по всем $(r+2)$-граням M^{r+2} куба M^n обозначим $A_1(M^n)$. Последовательно рассмотрим $(r + k)$-грани M^{r+k} и точки множества $A_{k-2}(M^n)$, лежащие на противоположных $(r + k - 1)$-гранях куба M^{r+k}, соединим прямолинейными отрезками, параллельными соответствующему ребру куба M^{r+k}. Объединение таких отрезков по всем $(r + k)$-граням куба M^n обозначим $A_{k-1}(M^n)$. По индукции определено множество $M_{n-r-1}(M_n)$, размерность которого равна $n - r - 1$.

Случаи $r = n$ и $r = -1$ включаются в общую схему, при этом $A_{-1}(M^n) = \Lambda$ и $A_n(M^n) = M^n$.

Полиэдр $A_{n-r-1}(M^n)$, однозначно определенный для куба M^n по числу r, $-1 \leqslant r \leqslant n$, можно назвать двойственным $(n - r - 1)$-мерным остовом куба M^n. Очевидно, что $P^r(M^n) \cap A_{n-r-1}(M^n) = \Lambda$.

Для построения компактов M_r^n куб M^n разбивается на 3^n равных правильных куба гиперплоскостями, проведенными перпендикулярно соответствующим ребрам куба M^n. Объединение тех из этих кубов, которые не пересекаются с r-мерным остовом $P^r(M^n)$ куба M^n обозначим $N_{n-r-1}(M^n)$.

Очевидно, что $A_{n-r-1}(M^n) \subset N_{n-r-1}(M^n)$.

1°. Построенные 3^n куба называются **кубами первого ранга**. Объединение тех из них, которые пересекаются с $P^r(M^n)$ обозначим $M^n_{r,1}$.

2°. С каждым кубом первого ранга, входящим в состав $M^n_{r,1}$, проделывается такая же операция; сумму всех выбранных кубов второго ранга обозначим $M^n_{r,2}$, и т. д.

∞^0. Получим убывающую последовательность замкнутых множеств $M^n \supset M^n_{r,1} \supset M^n_{r,2} \supset \ldots$

Компакт $M^n_r = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} M^n_{r,k}$ является компактом Менгера (см. ([1])).

Сумму всех r-мерных граней кубов k-го ранга, входящих в состав $M^n_{r,k}$, обозначим $P_k{}^r(M^n)$, $P_0{}^r(M^n) = P^r(M^n)$; сумму всех двойственных $(n - r - 1)$-мерных остовов кубов k-го ранга, входящих в состав $M^n_{r,k}$, обозначим $A_{n-r-1,k}(M^n)$, $A_{n-r-1,0}(M^n) = A_{n-r-1}(M^n)$; сумму всех кубов $(k+1)$-го ранга, не вошедших в состав $M^n_{r,k+1}$, но лежащих в $M^n_{r,k}$, обозначим $N_{n-r-1,k}(M^n)$, $N_{n-r-1,0}(M^n) = N_{n-r-1}(M^n)$. Имеем

$$A_{n-r-1,k}(M^n) \subset N_{n-r-1,k}(M^n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$A_{n-r-1,k}(M^n) \cap M_r{}^n = \Lambda, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

3. **Размерность вложения компактов Менгера.**

Предложение 1. *Для компакта Менгера* $M_r{}^n \subset E^n$, $\operatorname{dem} M_r{}^n = \dim M_r{}^n$.

Доказательство. Очевидно, $\dim M_r{}^n = r$, откуда $\operatorname{dem} M_r{}^n \geqslant r$. Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ существует ε-псевдоизотопия E^n на себя, неподвижная вне $U(M_r{}^n, \varepsilon)$, переводящая компакт $M_r{}^n$ на r-мерный полиэдр $P_k{}^r(M^n)$, где $k = k(\varepsilon)$.

Пусть k — настолько большое число, что $M^n_{r,k}$ состоит из кубов, диаметр которых меньше ε / n. Имеем $U(M_r{}^n, \varepsilon) \supset M^n_{r,k} \supset M_r{}^n$, где $k = k(\varepsilon)$. Пусть L^n — некоторый куб, входящий в состав $M^n_{r,k}$. Рассмотрим операции выметания в кубе L^n и в его гранях; центрами выметания являются центры граней (см. ([6])). Так как центры кубов L^n не принадлежат $M_r{}^n$, мы можем вымести часть компакта $M_r{}^n$, лежащую в L^n, на ∂L^n. Согласно конструкции множества $N_{n-r-1}(L^n)$, мы можем продолжать выметание по всем граням куба L^n, последовательно уменьшая размерность вплоть до граней размерности $r + 1$ включительно. Выметания согласованы, когда L^n пробегает множество всех кубов, входящих в состав $M^n_{r,k}$.

Так как диаметр каждого куба, входящего в состав $M^n_{r,k}$ меньше ε / n, то суперпозиция выметаний в остовах разбиения $M^n_{r,k}$, взятая в порядке убывания размерностей остовов, дает требуемую ε-псевдоизотопию E^n на себя. Таким образом, $\operatorname{dem} M_r{}^n \leqslant r$.

4. **Изотопия компактов** $M_r{}^n$ **и** $\overline{M}_r{}^n$. Через $\overline{M}_r{}^n$ будем обозначать компакт, получающийся точно таким же способом, как и компакт $M_r{}^n$, но при построении мы отправляемся не от правильного куба M^n, а от произвольного n-параллелепипеда $\overline{M}^n$, и деление гиперплоскостями производим не на равные кубы, а на n-параллелепипеды более высокого ранга, максимальный диаметр которых стремится к нулю в процессе построения $\overline{M}^n_{r,k}$ при $k \to \infty$, причем деление на параллелепипеды последующего ранга должно быть согласовано с делением на параллелепипеды предыдущего ранга, т. е. гиперплоскости предыдущего деления должны быть гиперплоскостями последующего деления,

$$\overline{M}^n_r = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{M}^n_{r,k}.$$

Как и выше, определяются множества

$$P^r_k(\overline{M}^n), A_{n-r-1,k}(\overline{M}^n), \quad N_{n-r-1,k}(\overline{M}^n), \ k = 1, 2, \ldots$$

Предложение 2. *Пусть* $M_r^n \subset E^n$ и $\overline{M}_r^n \subset E^n$. *Существует изотопия* E^n *на себя, неподвижная вне некоторого ограниченного открытого множества* V, *переводящая компакт* $\overline{M}_r^n$ *на компакт* M_r^n.

Доказательство. Пусть $\overline{M}^n$—параллелепипед, исходя из которого построен компакт $\overline{M}_r^n$, и $\overline{M}^{n-1}$— некоторая его грань. Рассмотрим прямую l, проходящую через одномерное ребро параллелепипеда $\overline{M}^n$, перпендикулярное выбранной грани $\overline{M}^{n-1}$; на этой прямой l отметим канторовский компакт $\overline{M}_0^1$, который получается, если отбрасывать из указанного ребра внутренности отрезков, покрывающихся образами отбрасываемых центральных параллелепипедов все более высокого ранга при ортогональном проектировании всего пространства E^n на прямую l.

Переведем компакт $\overline{M}_0^1$ с помощью изотопии прямой l на себя на компакт M_0^1 (как-либо выбранный на прямой l) неподвижно вне некоторого достаточно большого интервала.

Аналогичную изотопию произведем на всех прямых l, перпендикулярных гиперплоскости E^{n-1}, проходящей через $\overline{M}^{n-1}$; получим изотопию E^n на себя, неподвижную вне некоторых двух гиперплоскостей E_i^{n-1}, $i = 1, 2$, параллельных E^{n-1}.

Проделав аналогичные построения для всех ребер параллелепипеда $\overline{M}^n$, выходящих из некоторой одной его вершины, рассмотрим суперпозицию всех построенных изотопий E^n на себя; получим изотопию E^n на себя, переводящую $\overline{M}_r^n$ на M_r^n. Эту изотопию, как легко видеть, можно превратить в изотопию, неподвижную вне некоторой ограниченной области V, не изменяя на области U, $V \supset \overline{U}$.

5. Существование изотопии E^n, переводящей заданный компакт в компакт Менгера.

Теорема 2. *Для компакта* $K \subset E^n$, $\dim K = r$, *изотопия* F_t: $E^n \to E^n$, $t \in [01]$, *неподвижная вне некоторой ограниченной области* V *и такая, что* $F_1(K) \subset M_r^n$, *существует тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Dem} K = r$.

Доказательство. а) Так как согласно предложению 1 $\operatorname{Dem} M_r^n = r$, то из свойства инвариантности и монотонности размерности вложения и неравенств $\operatorname{Dem} K \geqslant \dim K$ (см. ([6])) следует, что если указанная изотопия существует, то $\operatorname{Dem} K = r$.

b) Пусть $\overline{M}^n$ — некоторый параллелепипед такой, что $\operatorname{int} \overline{M}^n \supset K$.

1°. Рассмотрим полиэдр $A_{n-r-1,0}(\overline{M}^n)$. Так как $\operatorname{Dem} K = r$ и $\dim(A_{n-r-1,0}(\overline{M}^n)) = n-r-1$, то по любому $\varepsilon_1 > 0$ существует ε_1-изотопия $F_{t,1}$: $E^n \to E^n$, $t \in [01]$, неподвижная вне $U(K, \varepsilon_1)$ и такая, что $F_{1,1}(K) \cap A_{n-r-1,0}(\overline{M}^n) = \Lambda$; ε_1 выберем столь малым, чтобы $U(K, \varepsilon_1) \subset \subset \operatorname{int}(\overline{M}^n)$.

Согласно условию $F_{1,1}(K) \cap A_{n-r-1,0}(\overline{M}^n) = \Lambda$, можно так выбрать разбиение параллелепипеда $\overline{M}^n$ на параллелепипеды первого ранга, что $N_{n-r-1,0}(\overline{M}^n) \cap F_{1,1}(K) = \Lambda$, поэтому будем иметь $F_{1,1}(K) \subset \operatorname{int}(\overline{M}^n_{r,1})$.

2°. Рассмотрим полиэдр $A_{n-r-1,1}(\overline{M}^n)$. Так как $\operatorname{Dem} F_{1,1}(K) = r$ и $\dim(A_{n-r-1,1}(\overline{M}^n)) = n-r-1$, то по любому $\varepsilon_2 > 0$ существует ε_2-изотопия $F_{t,2}$: $E^n \to E^n$, $t \in [01]$, неподвижная вне $U(F_{1,1}(K), \varepsilon_2)$ и такая, что $F_{1,2}F_{1,1}(K) \cap A_{n-r-1,1}(\overline{M}^n) = \Lambda$; ε_2 выберем столь малым, чтобы $U(F_{1,1}(K), \varepsilon_2) \subset \operatorname{int}(\overline{M}^n_{r,1})$. Согласно условию $F_{1,2}F_{1,1}(K) \cap A_{n-r-1,1}(\overline{M}^n) = \Lambda$, можно так выбрать разбиение параллелепипеда $\overline{M}^n$ на параллелепипеды второго ранга, что $N_{n-r-1,1}(\overline{M}^n) \cap F_{1,2}F_{1,1}(K) = \Lambda$, поэтому будем иметь $F_{1,2}F_{1,1}(K) \subset \operatorname{int} \overline{M}^n_{r,2}$ и т. д.

∞°. Получим последовательность ε_k-изотопий $F_{t,k}$: $E^n \to E^n$, $t \in [01]$, так как числа ε_k, $k = 1, 2, \ldots$, выбираются независимо, то можно предполагать, что эта последовательность удовлетворяет условиям леммы 1 из ([6]), поэтому в пределе при $k \to \infty$ получим ε-изотопию $F_t = \prod_{k=1}^{\infty} F_{t,k}$,

$t \in [01]$, неподвижную вне $U(K, \varepsilon)$, $\varepsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$, и такую, что $F_1(K) \subset \subset \overline{M}_r^n$, где компакт $\overline{M}_r^n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{M}_{r,k}^n$ получился одновременно с построением последовательности изотопий $F_{t,k}$, $t \in [01]$, $k = 1, 2, \ldots$, причем мы пользуемся тем, что выбор полиэдров $A_{n-r-1,k}(\overline{M}^n)$, $k = 1, 2, \ldots$, в процессе доказательства согласован с условием построения компакта $\overline{M}_r^n$, т. е. при делении куба $\overline{M}^n$ гиперплоскостями кубы более высокого ранга измельчаются. Далее применяем предложение 2.

Замечание 1. В работе ([4]) Боте получил условие, необходимое и достаточное, для того чтобы для компакта K, $\dim K = r$, существовал гомеоморфизм E^n на себя, переводящий K в M_r^n; если же $r = n - 1$ или $r = n - 2$, $n \neq 3$, то Боте доказывает, что такой гомеоморфизм существует всегда. Боте построил пример одномерного компакта K, гомеоморфного кривой Менгера M_1^3 в E^3, для которого не существует гомеоморфизма E^3 на себя, переводящего K в M_1^3; поэтому (в силу теоремы 2) $\operatorname{dem} K = \operatorname{Dem} K = 2$, тогда как $\dim K = 1$ ([3]).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
7 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Menger, Dimensionstheorie, Leipzig — Berlin, Teubner, 1928. [2] S. Lefschetz, Ann. Math., 32, 521 (1931). [3] H. Bothe, Fund. Math., 54, № 3, 251 (1964). [4] H. Bothe, Fund. Math., 56, № 2, 203 (1964). [5] М. А. Штанько, ДАН, 186, 1269 (1969). [6] М. А. Штанько, Матем. сборн., 83, 125, 234 (1970). [7] М. А. Штанько, ДАН, 198, № 4 (1971).