Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 1

УДК 513.88+513.83 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. АБРАМОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЛАБОЙ ТОПОЛОГИИ В ВЕКТОРНЫХ СТРУКТУРАХ

(Представлено академиком Л. В. Конторовичем 7 VI 1971)

1. Хорошо известно ([1]), что если в K-линеале X структурные операции $\sigma(X,\tilde{X})$ непрерывны, то для всякого функционала $f\in\tilde{X}$ компонента в $\tilde{X}$, им порожденная, будет конечномерна. Отсюда следует, что в KN-линеале X $\sigma(X,X^*)$-непрерывность структурных операций влечет конечномерность пространства X. Из результатов на эту же тему (о связи порядковых свойств со слабой топологией) упомянем еще теоремы Гальперина — Накано ([2]) и Уолша ([3]), дающие характеристику дискретных K-пространств.

Настоящая работа посвящена изучению тех связей между некоторыми порядковыми свойствами и топологиями $\sigma(X,\tilde{X})$ или $\sigma(\tilde{X},X)$, которые имеют место в любом K-пространстве. Основными результатами являются теоремы 4.1 и 4.3.

2. Терминология и обозначения. Относительно терминологии, принятой в теории полуупорядоченных пространств, мы следуем монографии ([4]) за одним исключением: нормальный подлинеал K-линеала мы будем называть ради краткости идеалом.

Напомним, что если X — K-линеал, то через $\tilde{X}(\bar{X})$ обозначается K-пространство всех регулярных (вполне линейных) функционалов на X. Если X — KN-линеал, то через X^* обозначается как обычно банахово сопряженное пространство. Норма в KN-линеале X называется непрерывной, если в X выполнено следующее условие, обычно называемое условием (A): $x_n\downarrow 0$ влечет $\|x_n\|\to 0$.

Напомним, что подмножество S K-линеала X называется нормальным, если из того, что $0\leqslant|y|\leqslant|x|$ и $x\in S$, следует, что $y\in S$.

Условимся, наконец, что, если векторные пространства E, F находятся в двойственности (не предполагаемой отделимой) и S — подмножество в E, то через $\sigma(E,F)=\mathrm{cl}\,S$ будем обозначать замыкание множества S в топологии $\sigma(E,F)$.

3. О слабой непрерывности регулярных операторов. Пусть X — K-линеал, наделенный топологией $\sigma(X,Y)$, где Y — идеал в $\tilde{X}$. При этом ради простоты будем считать, что Y, а следовательно, и $\tilde{X}$ тотально на X. Если U — регулярный оператор из X в X, причем $|U|\leqslant\lambda I_X$ (здесь λ — неотрицательное число, а I_X обозначает тождественный оператор на X), то легко показать, что U $\sigma(X,Y)-\sigma(X,Y)$-непрерывен. В частности, в этих топологиях непрерывны операторы проектирования на компоненты в X (ср. с ([5]), th 28,3). Если теперь X — K-пространство с тотальным $\bar{X}$, то, погружая X естественным образом в $\bar{\bar{X}}$, сразу получаем, что всякий регулярный оператор U из $\bar{X}$ в $\bar{X}$ такой что $|U|\leqslant\lambda I_{\bar{X}}$ $\sigma(\bar{X},X)-\sigma(\bar{X},X)$-непрерывен. В частности, в этих топологиях непрерывен оператор проектирования пространства $\bar{X}$ на компоненту в $\bar{X}$. Если же Z — компонента в $\tilde{X}$, то уже из простых примеров следует, что оператор P проектирования $\tilde{X}$ на Z не обязан быть $\sigma(\tilde{X},X)-\sigma(\tilde{X},X)$-непрерывным. Однако справедлива

Теорема 3.1. *Пусть X — K_σ-пространство, $U\in H_r(\tilde{X},\tilde{X})$, причем $|U|\leqslant\lambda I_{\tilde{X}}$.*

Тогда U секвенциально непрерывен в топологиях $\sigma(\tilde{X},X)-\sigma(\tilde{X},X)$.

Доказательство теоремы основывается на известной теореме Гротендика — Андо, наиболее общая формулировка которой приведена в ([6]).

Замечание. Для K-линеалов теорема 3.1 неверна.

4. Сохранение нормальности при слабом замыкании. Теоремы 4.1 и 4.2 были доказаны автором для K_σ-пространств. В. А. Гейлер упростил первоначальные доказательства и указал на возможность более общих формулировок.

Теорема 4.1. *Пусть X — (r)-полный архимедов K-линеал и S — нормальное подмножество в $\tilde{X}$.*

Тогда замыкание множества S в топологии $\sigma(\tilde{X}, X)$ есть нормальное подмножество в $\tilde{X}$.

Теорема 4.2. *Пусть X — K-линеал, Y — идеал в $\tilde{X}$, тотальный на X, и S — нормальное подмножество в X.*

Тогда замыкание множества S в топологии $\sigma(X, Y)$ есть нормальное подмножество в X.

Замечание. Нетривиальность теорем 4.1 и 4.2 заключается в том, что множество S не предполагается выпуклым. Если же S нормально и выпукло, то нормальность его замыкания в рассматриваемых топологиях следует из того, что поляра к нормальному множеству есть нормальное множество.

Непосредственным следствием этих двух теорем является

Теорема 4.2′. *Пусть X — $K_\sigma N$-пространство и S — нормальное подмножество в X (в X^*).*

Тогда замыкание множества S в топологии $\sigma(X, X^*)$ (в $\sigma(X^*, X)$) есть нормальное подмножество.

Теорема 4.3. *Пусть X — K_σ-пространство и S — нормальное подмножество в $\tilde{X}$.*

Тогда $\sigma(\tilde{X}, X)$-замыкание множества S^+ совпадает с положительной частью $\sigma(\tilde{X}, X)$-замыкания множества S, т. е. верно соотношение $\sigma(\tilde{X}, X) = \mathrm{cl}\,(S^+) = [\sigma(\tilde{X}, X) = \mathrm{cl}\,S]^+$. Здесь $S^+ = \{f \in S\colon f \geqslant 0\}$.

Ключом к доказательству теоремы 4.3 является редукция к случаю K_σ-пространства ограниченных элементов.

Из этих теорем вытекает ряд полезных следствий.

Следствие 4.4. *В условиях теоремы 4.3 $\sigma(\tilde{X}, X)$-замкнутость множества S равносильна $\sigma(\tilde{X}, X)$-замкнутости множества S^+.*

Следствие 4.5. *Пусть X — K-пространство, S — нормальное подмножество в X и Y — идеал в $\tilde{X}$.*

Тогда $\sigma(X, Y)$-замкнутость множества S равносильна $\sigma(X, Y)$-замкнутости множества S^+.

Подчеркнем, что тотальность Y на X не предполагается.

Замечание. Нам неизвестно, остается ли справедливым утверждение предыдущего следствия, если предполагать, что Y — идеал в $\tilde{X}$, в частности, $Y = \tilde{X}$. В некоторых случаях это удается доказать.

Следствие 4.6. *Пусть X — KN-пространство с условием* (A) *и S — нормальное подмножество в X. Если S^+ $\sigma(X, X^*)$-замкнуто, то и S $\sigma(X, X^*)$-замкнуто.*

5. (D)-свойство. Пусть X — K-линеал, Y — линейная подструктура в $\tilde{X}$, не обязательно тотальная на X.

Определение 1. Пусть элементы x, x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ из X_+ таковы, что $x_k \to x$ в топологии $\sigma(X, Y)$. Пусть e — некоторый элемент из X_+. Матрицу натуральных чисел $\{k_m{}^n\}$ будем называть (D_Y)-системой совокупности (e, x, x_k), если для всякого $n = 1, 2, \ldots$ $\{k_m^{n+1}\}_{m=1}^\infty$ есть возрастающая до $+\infty$ подпоследовательность последовательности $\{k_m{}^n\}_{m=1}^\infty$ и, кроме того, в X существуют

$$v_n = \sigma(X, Y) = \lim_{m\to\infty} ne \wedge x_{k_m^n}.$$

Разумеется, элементы v_n зависят от (D_Y)-системы. Отметим, что тогда необходимо $0 \leqslant v_n \uparrow \leqslant x$.

Определение 2. Будем говорить, что в X выполнено свойство (D_Y), если для любых e, x, x_k $(k=1,2,\ldots)$ из X_+ таких, что $x_k \to x$ в топологии $\sigma(X, Y)$, и для любой (D_Y)-системы $\{k_m{}^n\}$ совокупности (e, x, x_k) справедливо соотношение $v_n \uparrow (e)x$. (Напомним, что $(e)x$ обозначает проекцию элемента x на компоненту, порожденную элементом e.)

Теорема 5.1. *Пусть X — K-пространство, Y — идеал в $\overline{X}$.*

Тогда в X выполнено свойство (D_Y).

Доказательство теоремы основывается на доказательстве аналогичной теоремы для абстрактных L-пространств.

Следствие 5.2. *Пусть X — KN-пространство с тотальным $\overline{X}$.*

Тогда в $(X, \sigma(X, X^*))$ выполнено свойство (D_{X^*}).

Теорема 5.3. *Пусть X — K_σ-пространство.*

Тогда в $(\tilde{X}, \sigma(\tilde{X}, X))$ выполнено свойство (D_X).

Следствие 5.4. *Пусть X — $K_\sigma N$-пространство.*

Тогда в $(X^*, \sigma(X^*, X))$ выполнено свойство (D_X).

6. Полученные результаты могут быть использованы, например, для доказательства следующих теорем, которые мы формулируем не в самом общем виде.

Теорема 6.1. *Пусть X — интервально полное KN-пространство и S — нормальное выпуклое подмножество в X^*.*

Тогда bw^*-замкнутость множества S влечет его $\sigma(X^*, X)$-замкнутость.*

Теорема 6.2. *Пусть X — KN-пространство с условием* (A), *являющееся фундаментом в $L[0, 1]$. Пусть S — нормальное bw-замкнутое подмножество в X такое, что S, рассматриваемое в L, относительно $\sigma(L, L^*)$ компактно.*

Тогда S $\sigma(X, X^*)$-замкнуто в X.

В заключение выражаю благодарность проф. Б. З. Вулиху за постоянное внимание к работе и помощь при оформлении статьи.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
14 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. L. Peressini, Math. Ann., 144, 199 (1961). [2] I. Halperin, H. Nakano, Canad. Math. J., 3, 293 (1951). [3] B. Walsh, Math. Ann., 175, № 4 (1968). [4] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [5] H. Nakano, Modulared Semi-ordered Linear Spaces, Tokyo, 1950. [6] G. L. Seever, Trans. Am. Math. Soc., 133, 267 (1968).

* Напомним, что для нормированного пространства E bw^*-замкнутость множества F из E^* означает, что пересечение множества F с любым кратным единичного шара пространства E^* замкнуто в топологии $\sigma(E^*, E)$. Аналогично, $G < E$ bw-замкнуто, если $\sigma(E, E^*)$-замкнуто пересечение G с любым кратным единичного шара пространства E.