Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 1

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

И. И. БАВРИН

ОБОБЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛ КОШИ, ШВАРЦА И ПУАССОНА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 16 IV 1971)

Автором ([1-9]) в случае одного комплексного переменного дан ряд обобщений интегральных формул Коши, Шварца и Пуассона. В настоящей заметке в случае круга получены общие интегральные формулы (7), (8) и (9), из которых, помимо новых интегральных представлений, следуют как формулы Коши, Шварца и Пуассона, так и их обобщения, данные М. М. Джрбашяном ([10, 11]) и автором ([1-9]). При изложении сохраняем обозначения, использованные в ([5, 7]). Кроме того, здесь же приводится приложение одной из установленных автором структурных формул (([12]), формула (1)) к разрешимости тригонометрической проблемы моментов, ассоциированной с системой функций $\omega_j(x) \in \Omega$ $(j = 1, \ldots, m)$.

1. Пусть функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{1}$$

голоморфна в круге $|z| < R$. Автором ([9]) установлено, что для любого ρ $(0 < \rho < R)$ и любых $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\widetilde{k} = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы интегральные формулы

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{a\widetilde{a}}^{(-k, \widetilde{k})} \left[C_{(\widetilde{\omega})} \left(e^{-i\theta} \frac{z}{\rho};\ \omega \right) \right] L_{a\widetilde{a}}^{(k, -\widetilde{k})} [f_{(\omega)} (\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})]\, d\theta \tag{2}$$
$$(|z| < \rho);$$

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{a\widetilde{a}}^{(-k, \widetilde{k})} \left[S_{(\widetilde{\omega})} \left(e^{-i\theta} \frac{z}{\rho};\ \omega \right) \right] J_{a\widetilde{a}}^{(k, -\widetilde{k})} [\operatorname{Re} f_{(\omega)} (\rho e^{i\theta};\ \widetilde{\omega})]\, d\theta\ ^* \tag{3}$$
$$(|z| < \rho).$$

Из формулы (3) имеем

$$\operatorname*{Re}_{|z|<\rho} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{a\widetilde{a}}^{(k, \widetilde{k})} \left[P_{(\widetilde{\omega})} \left(\varphi - \theta, \frac{r}{\rho};\ \omega \right) \right] J_{a\widetilde{a}}^{(k, -\widetilde{k})} [\operatorname{Re} f_{(\omega)} (\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})]\, d\theta \tag{4}$$
$$(z = re^{i\varphi}).$$

Последняя формула и формула, полученная в результате применения формулы (4) к функции $-if(z)$, приводят к соотношению

$$\mathop{f(z)}_{|z|<\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{a\widetilde{a}}^{(-k, \widetilde{k})} \left[P_{(\widetilde{\omega})} \left(\varphi - \theta, \frac{r}{\rho};\ \omega \right) \right] L_{a\widetilde{a}}^{(k, -\widetilde{k})} [f_{(\omega)} (\rho e^{i\theta};\ \widetilde{\omega})]\, d\theta \tag{5}$$
$$(z = re^{i\varphi}).$$

---

* Напомним, что здесь $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, $\widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_{\widetilde{m}})$.

Так как функция (1) голоморфна в круге $|z| < R$, то голоморфна в этом же круге и функция

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{n-1}.$$

Значит ([6], теорема 1), функция

$$L^{(\omega)}[f'(re^{i\varphi})] \equiv f'_{(\omega)}(re^{i\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{n-1}^{(1)} \ldots \Delta_{n-1}^{(m)} n b_n (re^{i\varphi})^{n-1}$$

голоморфна в том же круге $|z| < R$. Отсюда следует, что функция

$$f'_{(\omega)}(z; \widetilde{\omega}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_{n-1}^{(1)} \ldots \Delta_{n-1}^{(m)} n}{\widetilde{\Delta}_{n-1}^{(1)} \ldots \widetilde{\Delta}_{n-1}^{(m)}} b_n z^{n-1},$$

где $\widetilde{\Delta}_n^{(\widetilde{j})}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательность чисел, определенная в [7], голоморфна в круге $|z| < R$ (используется формула Коши — Адамара).

Далее, в силу одной формулы * из [3], в круге $|z| < R$ имеем

$$f(z) = \alpha f(0) + z^{\alpha} L_{1,\alpha}^{(-\alpha)} [f^{(\alpha)}(z)] \;**, \tag{6}$$

где α — число, равное 0 или 1. Применяя к функции $f^{(\alpha)}(z)$ формулы (2), (3), (5) и подставляя это в формулу (6), получим

$$f(z) = \alpha f(0) + \frac{z^{\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{1,\alpha}^{(-\alpha)} \left[L_{\alpha\widetilde{\alpha}}^{(-k,\widetilde{k})} \left[C_{(\widetilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\ \omega\right)\right]\right] \times$$
$$\times L_{\alpha\widetilde{\alpha}}^{(k,-\widetilde{k})} [f_{(\omega)}^{(\alpha)}(\rho e^{i\theta};\ \widetilde{\omega})]\, d\theta \;*** \quad (|z| < \rho), \tag{7}$$

$$f(z) = \alpha f(0) + i z^{\alpha} \operatorname{Im} f^{(\alpha)}(0) +$$
$$+ \frac{z^{\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{1,\alpha}^{(-\alpha)} \left[L_{\alpha\widetilde{\alpha}}^{(-k,\widetilde{k})} \left[S_{(\widetilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\ \omega\right)\right]\right] J_{\alpha\widetilde{\alpha}}^{(k,-\widetilde{k})} [\operatorname{Re} f_{(\omega)}^{(\alpha)}(\rho e^{i\theta};\ \widetilde{\omega})]\, d\theta \tag{8}$$
$$(|z| < \rho),$$

$$\underset{|z|<\rho}{f(z)} = \alpha f(0) + \frac{z^{\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{1,\alpha}^{(-\alpha)} \left[J_{\alpha\widetilde{\alpha}}^{(-k,\widetilde{k})} \left[P_{(\widetilde{\omega})}\left(\varphi - \theta,\ \frac{r}{\rho};\ \omega\right)\right]\right] L_{\alpha\widetilde{\alpha}}^{(k,-\widetilde{k})} [f_{(\omega)}^{(\alpha)}(\rho e^{i\theta};\ \widetilde{\omega})]\, d\theta \tag{9}$$
$$(z = re^{i\varphi}).$$

Таким образом, установлена

Теорема 1. *Если функция* (1) *голоморфна в круге* $|z| < R$ *и* α — *число, равное* 0 *или* 1, *то для любого* ρ $(0 < \rho < R)$ *и любых* $k = 0, 1, 2, \ldots;$ $\widetilde{k} = 0, 1, 2, \ldots$ *справедливы интегральные формулы* (7)—(9).

2. Из множества следствий, вытекающих из интегральных формул (7)—(9), ограничимся лишь некоторыми следствиями из формулы (7).

---

* Имеется в виду формула

$$f(z_1, \ldots, z_n) = f(0, \ldots, 0) + \sum_{\nu=1}^{n} z_{\nu} L_1^{(-1)} [f'_{z_{\nu}}(z_1, \ldots, z_n)] \quad (n \geqslant 1),$$

где $f(z_1, \ldots, z_n)$ — функция, голоморфная в звездной относительно начала координат области G пространства C^n.

** $f^{(0)}(z) = f(z)$.

*** $f_{(\omega)}{}^{(0)}(\rho e^{i\theta};\ \widetilde{\omega}) = f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\ \widetilde{\omega})$.

1) $\alpha=0$, $k=0$, $\tilde{k}=0$, $\omega=(1,\ldots,1)$, $\tilde{\omega}=(1,\ldots,1)$. В этом случае имеем формулу Коши.

2) $\alpha=0$, $k=0$, $\tilde{k}=0$, $\omega=((1-x)^{\beta},1,\ldots,1)$, $\tilde{\omega}=(1,\ldots,1)$, где $-1<\beta<+\infty$. При этом условии формула (7) переходит в формулу М. М. Джрбашяна ([10], глава IX, формула 2.5).

3) $\alpha=0$, $k=0$, $\tilde{k}=0$, $\omega=(\omega_1,1,\ldots,1)$, $\tilde{\omega}=(1,\ldots,1)$, где $\omega_1=\omega_1(x)$ — любая функция из класса Ω [11]. В этом случае имеем снова формулу М. М. Джрбашяна ([11], формула 2.20).

4) $\alpha=0$, $k=0$, $\tilde{k}=0$, $\tilde{\omega}=(1,\ldots,1)$. При таком условии имеем первую из двух интегральных формул автора в теореме 1 из [6].

5) $\alpha=0$, $k=0$, $\tilde{k}=0$. В этом случае имеем первую из двух интегральных формул автора в теореме 1 из [7].

6) $\alpha=0$. При этом условии формула (7) переходит в интегральную формулу (5) из [9], установленную автором.

7) $\omega=(1,\ldots,1)$, $\tilde{\omega}=(1,\ldots,1)$. В этом случае имеем формулу (1) автора из [5].

8) $\tilde{k}=0$, $\omega=(1,\ldots,1)$, $\tilde{\omega}=(1,\ldots,1)$. При таком условии формула (7) переходит в формулу (2.8) автора из [3].

9) $\alpha=0$, $\tilde{k}=0$, $\omega=(1,\ldots,1)$, $\tilde{\omega}=(1,\ldots,1)$. В этом случае имеем формулу (2) автора из [2]; в [1] это формула (5.4).

10) $\alpha=1$. При этом условии из формулы (7) получаем новую общую формулу.

Аналогичные следствия вытекают из формулы (8). То же и в случае формулы (9).

3. М. М. Джрбашяном [11] установлены достаточные условия разрешимости тригонометрической проблемы моментов, ассоциированной с функцией $\omega(x)\in\Omega$. Здесь как приложение данного автором ([12], теорема 1) структурного представления класса $U_{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}$, который кратко обозначим через $U_{(\omega)}$ $(\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m)$, так и всюду ниже), приводится теорема 4, устанавливающая достаточные условия разрешимости тригонометрической проблемы моментов, ассоциированной с системой функций $\omega_j(x)\in\Omega$ $(j=1,\ldots,m)$. Прежде отметим следующие предложения, которые также используются при доказательстве теоремы 4.

Теорема 2. *Если каждая из функций $\omega_j(x)\in\Omega$ $(j=1,\ldots,m)$ не убывает на $[0,1)$, то функции $C(z;\omega)$ и $S(z;\omega)$ в круге $|z|<1$ имеют неотрицательную реальную часть.*

Теорема 3. 1) *Если каждая из функций $\omega_j(x)\in\Omega$ $(j=1,\ldots,m)$ не убывает на $[0,1)$ и $\omega_j(x)\uparrow+\infty$ при $x\uparrow 1$, то*

$$U_{(\omega)}\subset U. \tag{10}$$

2) *Если каждая из функций $\omega_j(x)\in\Omega$ $(j=1,\ldots,m)$ не возрастает на $[0,1)$ и $\omega_j(x)\downarrow 0$ при $x\uparrow 1$, то*

$$U\subset U_{(\omega)}. \tag{11}$$

3) *В соответствующих условиях оба включения* (10) *и* (11) *строгие.*

Доказательство теоремы 2 сводится к установлению того, что последовательность $\{P_k r^k\}(0\leqslant r<1)$, где $P_k=(\Delta_k^{(1)})\ldots\Delta_k^{(m)})^{-1}$, невозрастающая и выпуклая, а в процессе доказательства теоремы 3 существенно используется теорема 1 из [12].

Теорема 4. *Предположим, что $\omega_j(x)\in\Omega$ $(j=1,\ldots,m)$ и $\Delta_0^{(j)}=1$,*

$$\Delta_n^{(j)}=n\int_0^1\omega_j(x)\,x^{n-1}dx\quad(n=1,2,\ldots).$$

1) *Пусть каждая из функций $\omega_j(x)$ $(j=1,\ldots,m)$ не убывает на $[0,1)$, а $\psi_0(\theta)$ — неубывающая ограниченная функция на $[0,2\pi]$.*

Тогда тригонометрическая проблема моментов

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\psi(\theta) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где

$$c_n = P_n \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\psi_0(\theta),$$

имеет решение $\psi(\theta) = \tilde{\psi}_{(\omega)}(\theta)$ *в классе неубывающих и ограниченных функций.*

2) *Пусть каждая из функций* $\omega_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ *не возрастает на* $[0, 1)$ *и* $\omega_j(x) \downarrow 0$ *при* $x \uparrow 1$, *а* $\psi_0(\theta)$ — *функция конечного изменения на* $[0, 2\pi]$.

Тогда тригонометрическая проблема моментов

$$\tilde{c}_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\psi(\theta) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где

$$\tilde{c}_n = P_n^{-1} \int_0^{\pi} e^{-in\theta}\, d\psi_0(\theta),$$

имеет решение $\psi(\theta) = \tilde{\psi}_{(\omega)}(\theta)$ *в классе функций с конечным изменением на* $[0, 2\pi]$.

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
31 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Баврин, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, **166**, 3 (1966). [2] И. И. Баврин, ДАН, **172**, № 6 (1967). [3] И. И. Баврин, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, **188**, 3 (1967). [4] И. И. Баврин, ДАН, **180**, № 1 (1968). [5] И. И. Баврин, ДАН, **186**, № 2 (1969). [6] И. И. Баврин, ДАН, **187**, № 3 (1969). [7] И. И. Баврин, ДАН, **194**, № 2 (1970). [8] И. И. Баврин, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, **269**, 3 (1970). [9] И. И. Баврин, ДАН, **198**, № 5 (1971). [10] М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966. [11] М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР, сер. матем., **32**, № 5, 1075 (1968). [12] И. И. Баврин, ДАН, **193**, № 4 (1970).