Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 517.53:517.947.42

МАТЕМАТИКА

П. П. БЕЛИНСКИЙ

О ПОРЯДКЕ БЛИЗОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ К КОНФОРМНЫМ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 29 III 1971)

q-Квазиконформное отображение n-мерного шара при малом $q-1=\varepsilon$ близко в замкнутом шаре к некоторому мёбиусову отображению [1-3]. Согласно [3], для любого q-квазиконформного отображения $y=f(x)$, $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ шара B: $|x|\leqslant 1$ найдется мебиусово отображение $L(y)$ такое, что

$$|L(f(x))-x|\leqslant\lambda(q), \tag{1}$$

где $\lambda(q)$ зависит только от q и $\lim\limits_{q\to 1}\lambda(q)=0$.

В настоящей заметке мы оценим порядок малости величины $\lambda(q)$. Такие оценки, при дополнительных ограничениях на гладкость отображающей функции, были даны М. А. Лаврентьевым [1], порядок полученной близости оказался равным $k\cdot\varepsilon$. В настоящей работе такая оценка будет получена без каких-либо ограничений.

Вначале определим $\lambda(q)$ как минимальную функцию, удовлетворяющую неравенству (1), или, иначе:

$$\lambda(q)=\sup_f \inf_L \sup_{|x|\leqslant 1} |L(f(x))-x|,$$

т. е. берется λ_f — мера уклонения отображения $y=f(x)$ при всевозможных нормировках L

$$\lambda_f=\inf_L \sup_{|x|\leqslant 1} |L(f(x))-x|,$$

а затем sup по всевозможным q-квазиконформным отображениям шара B

$$\lambda(q)=\sup_f \lambda_f.$$

Для малого $\varepsilon=q-1$ легко показать существование экстремальной функции $f_q(x)$, уклонение которой от тождественного отображения равно $\lambda(q)$, иными словами,

$$\max_{|x|\leqslant 1}|f(x)-x|=\lambda(q),\quad \max_{|x|\leqslant 1}|L(f(x))-x|\geqslant\lambda(q).$$

Здесь max вместо sup можно брать потому, что отображение $f(x)$ при малом ε непрерывно в замкнутом шаре [3]. Кроме величины $\lambda(q)$, связанной с отображением шара и оптимальной нормировкой L, при доказательстве будут использованы и иные аналогичные функции. Величина $\lambda_N(q)$, зависящая от нормировки N, где под нормировкой мы понимаем дополнительные ограничения типа фиксации от одной до трех точек

$$f(x_i)=x_i,\quad i=1,2,3.$$

Для $\lambda_N(q)$ справедливы неравенства

$$\lambda(q)\leqslant\lambda_N(q)\leqslant K(N)\cdot\lambda(q). \tag{2}$$

Левое неравенство очевидно. Правое является следствием того геометрически очевидного факта, что переход от оптимальной нормировки к N-нормировке может быть осуществлен мёбиусовым преобразованием $L(y)$ таким, что

$$\max_{|y|\leqslant 1} |L(y)-y| \leqslant K(N)\cdot\lambda(q).$$

Величина $\lambda(q, R)$ определяется для $y=f(x)$, $f(\infty)=\infty$ отображений полупространства $\xi_1 \geqslant 0$. Она определяется как минимальная функция в неравенстве, аналогичном (1):

$$|L(f(x))-x| \leqslant \lambda(q, R) \tag{3}$$

при $|x| \leqslant R$, где L — мёбиусово преобразование, сохраняющее неподвижной бесконечно удаленную точку. Легко доказать, что

$$k(R)\cdot\lambda(q) \leqslant \lambda(q, R) \leqslant K(R)\cdot\lambda(q). \tag{4}$$

Идея доказательства того, что $\lambda(q) \leqslant K\cdot(q-1)$, весьма проста. Она опирается на факт, что суперпозиция m q-квазиконформных отображений есть Q-квазиконформное отображение $Q=q^m$. Если одно q-квазиконформное отображение $y=f(x)$ дает величину уклонения $\lambda(q)$, то m таких отображений, когда их деформации направлены одинаково, дадут уклонение $m\lambda(q)$ (в нашем доказательстве $mk\lambda(q)$, где k — постоянная, $k<1$). Но $mk\lambda(q) \leqslant \lambda(Q)$. Поэтому, подставляя $m=\ln Q/\ln q$ и обозначая $\frac{1}{k}\frac{\lambda(Q)}{\ln Q}=K$, получим

$$\lambda(q) \leqslant K \ln q \leqslant K(q-1), \tag{5}$$

что и требуется доказать.

В доказательстве при этом приходится преодолеть две основные трудности. Первая заключается в том, что отображение $y=f(x)$ отображает шар B: $|x| \leqslant 1$ на область, не лежащую, вообще говоря, внутри шара B. Поэтому суперпозиция $f\circ f$, вообще говоря, не определена. Для того чтобы обойти эту трудность, рассмотрим минимальный шар B_f, содержащий область $f(B)$. Этот шар B_f имеет по крайней мере две точки касания y_1 и y_2 с границей области $f(B)$, отстоящие друг от друга на расстоянии $r \geqslant r_0 \approx 1/\sqrt{2}$, где знак $\approx$ обозначает равенство с точностью до величин порядка $\lambda(q)$.

Осуществляя мёбиусовы отображения в пространствах x и y, переводящие точки x_1 и $y_1=f(x_1)$ в начало координат, а точки x_2 и $y_2=f(x_2)$ в ∞, мы можем свести задачу к случаю отображения полупространства $\xi_1 \geqslant 0$ на область, лежащую в полупространстве $\eta_1 \geqslant 0$. Таким образом, суперпозиция отображений $f^m(x)=f\circ f\circ\ldots\circ f(x)$ уже может быть определена. Для преодоления другой трудности служит лемма, являющаяся по существу основной леммой доказательства.

Лемма. *Пусть функция $y=f(x)$, $f(\infty)=\infty$, отображает q-квазиконформно полупространство $\xi_1 \geqslant 0$ и для $|x| \leqslant 1$*

$$|f(x)-x| \leqslant K_1\lambda(q). \tag{6}$$

Тогда в той части окрестности каждой произвольной точки x_0, $|x_0| \leqslant 1$, $|x-x_0| \leqslant r$, которая лежит в шаре $|x| \leqslant 1$, имеет место неравенство

$$|f(x)-x-f(x_0)-x_0| \leqslant K_2\sqrt{r}\,\lambda(q), \tag{7}$$

где K_2 зависит от K_1 и от константы $K(1)$ неравенства (4).

Доказательство этой леммы проводится по следующей схеме. Рассматривается преобразование $u=(x-x_0)/(2r)$. Далее, согласно (3) строим мёбиусово отображение L такое, что

$$|L(f(x(u)))-u| \leqslant \lambda(q, R). \tag{8}$$

Затем пользуемся тем, что из условия $L(\infty) = \infty$ следует $L(y) = \omega(y) + c$, где ω есть преобразование подобия относительно начала координат. Наконец, из неравенства (6), примененного в шаре $|x - x_0| \leqslant \sqrt{r}$, и (8) получаем оценки для линейного функционала $\omega(y)$:

$$\|\omega\| = 1 + O(\lambda(q)), \quad \|\omega - E\| = O\left(\frac{\lambda(q)}{\sqrt{r}}\right), \tag{9}$$

где E — тождественный оператор.

Подстановка $L(y) = \omega(y) + c$ и оценки (9) приводят к неравенству (7), что и доказывает лемму. Эта лемма позволяет построить суперпозицию отображений $f^m(x)$ и доказать неравенство (5).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев, Сибирск. матем. журн., 3, № 5 (1962). [2] П. П. Белинский, ДАН, 147, № 5 (1962). [3] П. П. Белинский, Некоторые проблемы математики и механики, Л., 1970.