Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 1

УДК 517.514 *МАТЕМАТИКА*

В. И. БУРЕНКОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $C^r(\Omega)$ ФИНИТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОТКРЫТОГО МНОЖЕСТВА Ω

(Представлено академиком В. С. Владимировым 7 VI 1971)

Пусть E_n — n-мерное эвклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $\Omega\subset E_n$ — произвольное открытое множество. Функция $f(x)\in C^r(\Omega)$, $r=0,1,2,\ldots$, если в Ω существуют и непрерывны частные производные $D^kf=\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$, $|k|=k_1+\ldots+k_n\leqslant r$, и конечна норма

$$\|f\|_{C^r(\Omega)}=\max_{|k|\leqslant r}\sup_{x\in\Omega}|D^kf(x)|. \qquad (1)$$

Во многих вопросах приходится рассматривать наряду с пространствами $C^r(\Omega)$ пространства, представляющие собой замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций по норме (1). Известно, что если Ω — ограниченная область с достаточно «хорошей» границей, то эти пространства совпадают с пространством $\dot{C}^r(\Omega)$ функций $f\in C^r(\Omega)$, для которых для любых $x\in\Gamma$

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}}D^kf(y)=0,\quad |k|\leqslant r. \qquad (2)$$

Следуя рассуждениям Г. Г. Казаряна (2), для весьма широкого класса областей Ω (допускающих «локальный сдвиг») можно получить следующее утверждение: *если*

$$\Phi(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\Omega,\\ 0, & x\,\overline{\in}\,\Omega,\end{cases}\quad\in C^r(E_n), \qquad (3)$$

то функцию $f(x)$ можно приблизить сколь угодно точно функциями из $C_0^\infty(\Omega)$. В (2) модифицируется метод аппроксимации функции ее усреднениями со сдвигом, использованный Э. Гальярдо (1).

Ниже мы приведем результаты, из которых следует, в частности, что замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике (1) совпадает с пространством $\dot{C}^r(\Omega)$ для произвольного ограниченного открытого множества.

Обозначим, как обычно, через Ω_δ совокупность тех $x\in\Omega$, которые отстоят от границы $\Gamma(\Omega)$ более, чем на δ.

Теорема 1. *Пусть Ω — произвольное открытое множество. Для любого $\delta>0$ для $f\in C^r(\Omega)\cap\dot{C}^{r-1}(\Omega)$*

$$\|f\|_{C(\Omega-\Omega_\delta)}\leqslant\frac{n^{r/2}\delta^r}{r!}\max_{|k|=r}\|D^kf\|_{C(\Omega-\Omega_\delta)}. \qquad (4)$$

Константа в неравенстве (4) точная в том смысле, что для любых рассматриваемых r, n и δ

$$\sup_{\Omega}\sup_{f\neq 0}\frac{\|f\|_{C(\Omega-\Omega_\delta)}}{\max_{|k|=r}\|D^kf\|_{C(\Omega-\Omega_\delta)}}=\frac{n^{r/2}\delta^r}{r!}.$$

Следствие. *Пусть Ω — ограниченное открытое множество и d — его диаметр. Если $f \in C^r(\Omega) \cap \dot{C}^{r-1}(\Omega)$, то*

$$\|f\|_{C(\Omega)} \leqslant \frac{n^{r/2}}{r!}\left(\frac{d}{2}\right)^r \max_{|k|=r} \|D^k f\|_{C(\Omega)}.$$

Лемма 1. *Если $f \in \dot{C}^r(\Omega)$, где Ω — произвольное открытое множество, то справедливо* (3).

Лемма 2. *Пусть $f \in \dot{C}^r(\Omega)$, где Ω — ограниченное открытое множество, тогда для $l = 0, 1, \ldots, r$ при $\delta \to 0$*

$$\|f\|_{C^l(\Omega - \Omega_\delta)} = o(\delta^{r-l}).$$

Теорема 2. *Пусть $f \in C^r(\Omega)$, где Ω — произвольное открытое множество в E_n. Для того чтобы существовала такая последовательность φ_s, что*

$$\varphi_s \in C_0^\infty(\Omega), \quad \lim_{s\to\infty} \|f - \varphi_s\|_{C^r(\Omega)} = 0, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы $f \in \dot{C}^r(\Omega)$ и в случае неограниченного открытого множества

$$\lim_{\substack{y\to\infty \\ y\in\Omega}} D^k f(y) = 0, \quad |k| \leqslant r.$$

При доказательстве достаточности последовательность φ_s строится следующим образом: $\varphi_s(x) = f_{1/s}(x)$, где

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int\limits_{\Omega_{2\delta}} \omega\left(\frac{x-y}{\delta}\right) f(y)\, dy$$

(здесь $\omega(z) \in C^\infty(E_n)$, $\omega(z) = 0$ при $|z| \geqslant 1$, $\int\limits_{E_n} \omega(z)\, dz = 1$).

Вопрос о возможности приближения с любой степенью точности функции $f \in C^r(\Omega)$ бесконечно дифференцируемыми финитными функциями тесно связан с вопросом о возможности продолжения функции $f \in C^r(\Omega)$ нулем на $E_n - \Omega$ с сохранением дифференциальных свойств. Из (5) следует (3). Обратное, вообще говоря, неверно. Например, пусть Ω есть куб $\{|x_i| < 1\}$, из которого выброшена часть плоскости $x_n = 0$, $0 \leqslant x_i < 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, а $f(x) = x_n \rho(x)$, где $\rho(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 при $|x_i| < 1/2$, $i = 1, \ldots, n$, и равная 0, если хотя бы для одного i $|x_i| > 3/4$. Очевидно, что $\Phi(x) \in C^r(E_n)$, но (5) не выполняется, так как $f \,\overline{\in}\, \dot{C}^r(\Omega)$. Однако при некоторых дополнительных предположениях относительно Ω условие (3) является достаточным для справедливости (5).

Теорема 3. *Пусть Ω — ограниченное открытое множество, удовлетворяющее условию*

$$\Gamma(\Omega) = \Gamma(\overline{\Omega}), \tag{6}$$

и $f \in C^r(\Omega)$.

Тогда условия (3) *и* (5) *эквивалентны.*

Необходимые и достаточные условия на $f \in C^r(\Omega)$, при которых выполняется (5), можно сформулировать в терминах продолжения на $E_n - \Omega$ и в случае произвольного ограниченного открытого множества Ω.

Теорема 4. *Пусть Ω — ограниченное открытое множество и $f \in C^r(\Omega)$. Для того чтобы выполнялось* (5), *необходимо и достаточно, чтобы для любого k, $|k| \leqslant r$,*

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} D^k f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \,\overline{\in}\, \Omega, \end{cases} \in C^{r-|k|}(E_n).$$

Теоремы 3 и 4 для неограниченных открытых множеств неверны.

В заключение мы приведем необходимые и достаточные условия на Ω, при которых условия (3) и (5) эквивалентны для любых $f \in C^r(\Omega)$. Для этого нам потребуется ввести следующие определения. Пусть G — некоторое непустое множество в E_n. Для $x \in G$ обозначим через K_x множество тех единичных векторов, которые являются частичными пределами функции $(y-z)/|y-z|$ при $y, z \to x$, $y, z \in G$. Далее через L_x обозначим подпространство, натянутое на векторы из K_x. Назовем подпространство

$$M_x = L_x + \overline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in G}}} L_y$$

касательным подпространством к множеству G в точке x и положим

$$n_x = \dim M_x.$$

Если для любого $x \in G$ $n_x = m$, будем говорить, что множество G имеет «равномерную размерность» m: $\dim^* G = m$ (такое определение существенно отличается от общепринятых определений размерности, приведенных, например, в ([3])).

Теорема 5. *Пусть $\Omega \subset E_n$ — открытое множество. Для того чтобы для любой функции $f \in C^r(\Omega)$ условие* (3) *было эквивалентно условию* (5), *необходимо и достаточно, чтобы множество Ω было ограниченным и*

$$\dim^* (E_n - \Omega) = n. \tag{7}$$

При доказательстве необходимости в теореме 5 существенно используется теорема Уитни о продолжении ([4]).

Приведем еще характерный пример множества Ω, для которого выполняется (7), но не выполняется (6). Пусть S — совершенное нигде не плотное множество на отрезке $[-1/2, 1/2]$; в качестве Ω можно взять множество $K - (\underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n})$, K — единичный открытый шар в E_n.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Поступило
22 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Gagliardo, Ricerche di mat., 7, 102 (1958); Сборн. пер. Математика, 5, № 4, 87 (1961). [2] Г. Г. Казарян, Матем. заметки, 2, 45 (1967). [3] В. Гуревич, Г. Волмэн, Теория размерностей, ИЛ, 1948. [4] H. Whitney, Trans. Am. Math. Soc., 36, 63 (1934).