

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ, Л. А. СУХАНОВ, П. Ф. ПОХИЛ

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГОРЯЩЕГО ПОРОХА С АКУСТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком В. И. Кондратьевым 17 II 1971)

Если над поверхностью горящего пороха существует тонкое равновесное пламя, за которым газ можно считать химически замороженным, невязким и нетеплопроводным, то для продуктов горения имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_g) &= 0, \quad \frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = \rho R T, \\ c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} \right) &= \frac{\partial p}{\partial t} + u_g \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_g h) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь h — химическая энтальпия продуктов ($h = \sum a_j h_j$, где a_j — концентрация, а h_j — химическая энтальпия j компонента). Для рассмотрения нестационарного горения пороха в дальнейшем удобно воспользоваться системой координат, жестко связанной с поверхностью горения. Выполняя в (1) преобразование $x' = x + \int_0^t u_g(t) dt$ (u_g — скорость горения), линей-

ризуя получающиеся после этого уравнения по малым возмущениям

$\delta \pi = \delta p / \bar{p}$, $\delta w = \delta u / \bar{u}$ ($\bar{u} = \bar{u}_g + \bar{u}_s$), $\delta \theta_g = \delta T / \bar{T}$, $\delta i_x = \delta h / \bar{h}$
и исключая из рассмотрения плотность, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \pi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \delta \pi}{\partial x'} + \bar{u} \frac{\partial \delta w}{\partial x'} - \frac{\partial \delta \theta_g}{\partial t} - \bar{u} \frac{\partial \delta \theta_g}{\partial x'} &= 0, \\ \frac{\partial \delta w}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \delta w}{\partial x'} + \frac{c^2}{\gamma \bar{u}} \frac{\partial \delta \pi}{\partial x'} &= 0 \quad (c^2 = \gamma \bar{p} / \bar{\rho}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta \theta_g + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x'} \delta \theta_g - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\partial \delta \pi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \delta \pi}{\partial x'} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta i_x + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x'} \delta i_x &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем искать решение (2) в виде $\delta z_j = Z_j \exp i \omega' t$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{d\Pi}{dx'} &= \frac{i \omega' \beta^2}{\beta^2 - 1} (\gamma W - \Pi), \quad \bar{u} \frac{dW}{dx'} = \frac{i \omega'}{\beta^2 - 1} \left(\frac{\Pi}{\gamma} - \beta^2 W \right), \quad \beta = \frac{\bar{u}}{c}, \\ \bar{u} \frac{d\Theta}{dx'} &= \frac{i \omega' (\gamma - 1)}{\gamma (\beta^2 - 1)} (\beta^2 \gamma W - \Pi) - i \omega' \Theta, \quad \bar{u} \frac{dI_x}{dx'} + i \omega' I_x = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Частные решения (3) представляются волнами $Z_j = |Z_j| \exp k_j x'$, для определения амплитуд $|Z_j|$ и волновых векторов k_j которых имеем систему

$$\begin{aligned} |\Pi| \left(\bar{u} k + \frac{\beta^2 \omega'}{\beta^2 - 1} \right) - \frac{\beta^2 \gamma \omega'}{\beta^2 - 1} |W| &= 0, \quad |I_x| (k \bar{u} + \omega') = 0, \\ -|\Pi| \frac{\omega'}{\gamma (\beta^2 - 1)} + |W| \left(k \bar{u} + \frac{\beta^2 \omega'}{\beta^2 - 1} \right) &= 0, \\ |W| \frac{(\gamma - 1) \beta^2 \omega'}{\beta^2 - 1} - |\Theta| (k \bar{u} + \omega') - |\Pi| \frac{(\gamma - 1) \omega'}{\gamma (\beta^2 - 1)} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Разрешая характеристический определитель (4), находим следующие возможные значения k_j :

$$k_1 = -\omega' / (c + \bar{u}), \quad k_2 = \omega' / (c - \bar{u}), \quad k_3 = k_4 = -\omega' / \bar{u}. \quad (5)$$

С учетом (5) общее решение линеаризованной системы уравнений гидродинамики принимает форму

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \gamma\beta e^{i\omega't} (C_1 e^{ik_1 x'} - C_2 e^{ik_2 x'}), \quad \delta w = e^{i\omega't} (C_1 e^{ik_1 x'} + C_2 e^{ik_2 x'}), \\ \delta\theta_g &= (\gamma - 1)\beta e^{i\omega't} (C_1 e^{ik_1 x'} - C_2 e^{ik_2 x'}) + C_3 e^{i(\omega't + k_3 x')}, \\ \delta i_x &= C_4 e^{i(\omega't + k_4 x')}. \end{aligned} \quad (6)$$

Видно, что в газообразных продуктах горения, помимо акустических волн давления, скорости и плотности, существуют индуцированные волны температуры и химической энthalпии.

Для определения постоянных C_j в (6) необходимо рассмотреть нестационарное горение пороха. Воспользуемся для этого феноменологической моделью (¹, ²). Пусть полупространство $-\infty < x' \leq 0$ занято абсолютно жесткой для акустических волн конденсированной фазой. Так как в пределах модели горения с квазистационарным пламенем длины рассматриваемых волн значительно больше толщины зоны реакций, то тонкую реакционную зону можно отнести к плоскости $x' = 0$. Тогда нестационарное горение пороха в поле возмущений (6) при введении безразмерных

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{\bar{u}_s}{\kappa} x', \quad \tau = \frac{\bar{u}_s^2}{\kappa} t, \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \quad v = \frac{u_s}{\bar{u}_s}, \\ \Omega' &= \omega' \frac{\kappa}{\bar{u}_s^2}, \quad \zeta_j = k_j \frac{\kappa}{\bar{u}_s} \end{aligned}$$

($\bar{u}_s$ — стационарная скорость горения, κ — коэффициент температуропроводности пороха) в подвижной системе координат описывается линеаризованной системой

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \delta\theta - \frac{\partial}{\partial \xi'} \delta\theta - \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\theta &= e^{\zeta'} \delta\theta \quad (-\infty < \xi' \leq 0), \\ \delta\theta(\xi' \rightarrow -\infty) &= 0, \quad \delta\theta(\xi' = 0, \tau) = \delta\theta_s(\tau), \quad \delta\theta(\xi', \tau = 0) = 0, \\ \delta\theta_s(0) &= \delta v(0) = \delta\theta_F(0) = 0, \\ \delta v &= (\partial v / \partial \pi)_\varphi \delta\pi + (\partial v / \partial \varphi)_\pi \delta\varphi \quad (\varphi = (\partial\theta / \partial \xi')_{\xi'=0}), \\ \delta\theta_s &= (\partial\theta_s / \partial \pi)_\varphi \delta\pi + (\partial\theta_s / \partial \varphi)_\pi \delta\varphi, \\ \delta\theta_F &= (\partial\theta_F / \partial \pi)_\varphi \delta\pi + (\partial\theta_F / \partial \varphi)_\pi \delta\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

а уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \Delta (A e^{i(\Omega'\tau + \zeta_1 \xi')} + e^{i(\Omega'\tau + \zeta_2 \xi')}), \\ \delta w &= \frac{\Delta}{\gamma\beta} (A e^{i(\Omega'\tau + \zeta_1 \xi')} - e^{i(\Omega'\tau + \zeta_3 \xi')}), \\ \delta\theta_g &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \delta\pi + \Delta B e^{i(\Omega'\tau + \zeta_3 \xi')}, \quad \delta i_x = \Delta I_x e^{i(\Omega'\tau + \zeta_4 \xi')}, \end{aligned} \quad (8)$$

где Δ — амплитуда падающей волны давления.

Решение (7), ввиду того что при $\xi' = 0$ $\delta\pi \sim \exp i\Omega'\tau$, разыскиваем среди таких же функций $\delta z_j = \Delta Z_j \exp i\Omega'\tau$. Тогда комплексные амплитуды возмущений определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Theta_s &= (1 + A) \left(-\frac{\delta}{k} + \frac{r}{k} V_1 \right), \quad V = V_1 (1 + A), \quad \Pi = (1 + A), \\ V_1 &= \frac{v + \delta(\alpha - 1)}{1 - k + (\alpha - 1)(r - ik/\Omega')}, \quad \varepsilon\Theta_F = (1 + A) \left(s - v \frac{q}{k} + \frac{q}{k} V_1 \right), \\ \Phi &= (1 + A) \left(\frac{k + r - 1}{k} V_1 - \frac{\delta - v}{k} \right), \quad I_x = \Theta_s - \frac{c_p}{c_s} \Theta_F - \Phi + V, \end{aligned} \quad (9)$$

где параметры $v, k, r, q, \delta, s, \varepsilon$ описывают свойства реакционных зон в пламени и в конденсированной фазе пороха (1):

$$\begin{aligned} v &= (\partial \ln \bar{u}_s / \partial \ln p)_{T_0}, \quad k = (\bar{T}_s - T_0) (\partial \ln \bar{u}_s / \partial T_0)_p, \\ r &= (\partial \bar{T}_s / \partial T_0)_p, \quad \mu = 1 / (\bar{T}_s - T_0) (\partial \bar{T}_s / \partial \ln p)_{T_0}, \\ s &= (\partial \ln \bar{T}_p / \partial \ln p)_{T_0}, \quad q = (\bar{T}_s - T_0) (\partial \ln \bar{T}_p / \partial T_0)_p, \\ \varepsilon &= (\bar{T}_s - T_0) / \bar{T}_p, \quad \delta = vr - \mu k, \quad \alpha = 1/2(1 + \gamma(1 + 4i\Omega')). \end{aligned}$$

Постоянные A, B, I_x определяются теперь из условия неразрывности решений (8) и (9) при $\xi' = 0$: $\Theta_s = \Theta_s, W(\xi' = -0) = W(\xi' = +0)$,

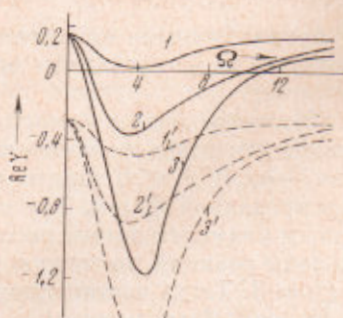


Рис. 1. Зависимость реальной части акустического импеданса от безразмерной частоты для значений параметров $v = 0,66, r = 0,3, \mu = 0,1, q = 0,1$ при $s = 0$ (1, 2, 3) и $s = 0,5$ (1', 2', 3'): 1, 1' - $k = 0,5$; 2, 2' - $k = 1,0$; 3, 3' - $k = 1,5$.

$I_x(\xi' = -0) = I_x(\xi' = +0)$. Значение скорости оттока газов $W(-0)$ из пламени найдем, воспользовавшись законом сохранения массы

$$W(\xi' = -0) = V + \varepsilon \Theta_p - \Pi. \quad (10)$$

Используя определение акустической проводимости поверхности горения $Y = -(\delta w / \delta p)_{v=0}$, из (8) - (10) имеем

$$\begin{aligned} Y &= 1 - (s - vq/k) - (1 + q/k)V_1, \quad A = (1 - \gamma\beta Y)/(1 + \gamma\beta Y), \\ B &= \frac{2}{1 + \gamma\beta Y} \left(s - vq/k + q/kV_1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \right), \quad \Theta_s = \frac{2}{1 + \gamma\beta Y} \left(-\frac{\delta}{k} + \frac{2}{k}V_1 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$I_x + \frac{2}{1 + \gamma\beta Y} \left[\frac{1}{k} \left(1 - \frac{c_p}{c_s \varepsilon} q \right) (V_1 - v) - \frac{c_p}{c_s \varepsilon} s \right], \quad V = \frac{2}{1 + \gamma\beta Y} V_1.$$

Выражения (8) - (11) полностью описывают решение поставленной задачи в системе координат, жестко связанной с поверхностью горения. Переходя в неподвижную систему координат и удерживая члены первого порядка малости по Δ , получим

$$\begin{aligned} \delta p &= \Delta \left\{ \frac{1 - \gamma\beta Y}{1 + \gamma\beta Y} \exp i \left[\frac{1 - \bar{u}_s/(c + \bar{u}_g)}{1 + \bar{u}_s/(c - \bar{u}_g)} \Omega \tau + \xi_1 \xi \right] + \exp i (\Omega \tau + \xi_2 \xi) \right\}, \\ \delta \omega &= \frac{\Delta}{\gamma\beta} \left\{ \frac{1 - \gamma\beta Y}{1 + \gamma\beta Y} \exp i \left[\frac{1 - \bar{u}_s/(c + \bar{u}_g)}{1 + \bar{u}_s/(c - \bar{u}_g)} \Omega \tau + \xi_1 \xi \right] - \exp i (\Omega \tau + \xi_2 \xi) \right\}, \\ \delta \theta_s &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \delta p + \frac{i2\Delta}{1 + \gamma\beta Y} \left(s - v \frac{q}{k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{k} V_1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \exp i \left(\frac{1 - \bar{u}_s/\bar{u}_g}{1 + \bar{u}_s/(c - \bar{u}_g)} \Omega \tau + \xi_3 \xi \right), \\ \delta i_x &= \frac{2\Delta}{1 + \gamma\beta Y} \left[\frac{1}{k} \left(1 - \frac{c_p}{c_s \varepsilon} q \right) (V_1 - v) - \frac{c_p}{c_s \varepsilon} s \right] \times \\ &\quad \times \exp i \left(\frac{1 - \bar{u}_s/\bar{u}_g}{1 + \bar{u}_s/(c - \bar{u}_g)} \Omega \tau + \xi_4 \xi \right). \end{aligned}$$

Видно, что из-за движения горячей поверхности пороха частоты всех наблюдаемых в неподвижной системе координат волн испытывают смещение (эффект Доплера). При этом подобное смещение для акустических волн пропорционально отношению $\bar{u}_s/c$, а тепловых волн и волн химической энthalпии — отношению $\bar{u}_s/\bar{u}_g$.

В ряде случаев учет эффекта Доплера для тепловых возмущений необходим, в то время как аналогичным эффектом для акустических волн в задачах горения порохов почти всегда можно пренебречь. На рис. 1 изображена представляющая практический интерес зависимость действительной величины акустической проводимости от частоты возмущений.

Институт химической физики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. В. Новожилов, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 1 (1967). ² Ю. А. Гостинцев, Л. А. Суханов, П. Ф. Похил, ДАН, 195, № 1 (1970).