Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 1

УДК 519.217+517.946 *МАТЕМАТИКА*

А. Д. ВЕНТЦЕЛЬ

# ОБ АСИМПТОТИКЕ НАИБОЛЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 VI 1971)*

В этой заметке исследуется вопрос об асимптотике наибольшего (наименьшего по абсолютной величине) собственного значения эллиптического оператора $L^\varepsilon = \sum_i b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{ij} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ в ограниченной области $D$ $r$-мерного пространства с нулевыми граничными условиями на (гладкой) границе $\partial D$ ($\varepsilon$ — параметр, стремящийся к 0).

Как показано в ([2]), для ряда задач, связанных с оператором $L^\varepsilon$, оказывается важным функционал, определяемый для абсолютно непрерывных функций $\varphi_t = (\varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^r)$, $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$, равенством

$$I(\varphi) = I_{T_1, T_2}(\varphi) = \int_{T_1}^{T_2} \sum_{ij} a_{ij}(\varphi_t)\,[\dot\varphi_t^i - b^i(\varphi_t)]\,[\dot\varphi_t^j - b^j(\varphi_t)]\,dt$$

(матрица $(a_{ij}(x)) = (a^{ij}(x))^{-1}$), и функция

$$V(x, y) = \inf\{I(\varphi)\colon \varphi_{T_1} = x,\ \varphi_{T_2} = y\}.$$

Теорема. *Пусть область $D$ такова, что все решения системы обыкновенных уравнений*

$$\dot x_t = b(x_t), \quad b = (b^1, \ldots, b^r), \tag{1}$$

*начинающиеся в точках $D \cup \partial D$ и не выходящие из этого множества, стремятся при $t \to \infty$ к положению устойчивого равновесия $x_0 \in D$.*

*Тогда для наибольшего собственного значения $\lambda_1^\varepsilon$ оператора $L^\varepsilon$ в $D$ с нулевыми условиями на $\partial D$ имеет место соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon^2 \ln|\lambda_1^\varepsilon| = -\min_{y\in\partial D} V(x_0, y).$$

Прием, позволяющий доказать эту теорему, действует также и в случае, когда система (1) имеет более сложную структуру. Он состоит в сведении задачи об асимптотике наибольшего собственного значения $L^\varepsilon$ к задаче о наибольшем собственном значении матрицы, зависящей от параметра, с заданной асимптотикой элементов. (В случае, рассматриваемом в теореме, порядок матрицы равен 1, и задача получает немедленное решение.)

1. Первая ступень сведения не связана с наличием малого параметра. Рассмотрим диффузионный процесс $x_t$ в $r$-мерном пространстве, соответствующий эллиптическому оператору $L$ (с достаточно гладкими коэффициентами). Известно (см. ([1])), что наибольшее собственное значение $\lambda_1$ оператора $L$ в $D$ с нулевыми условиями на $\partial D$ может быть охарактеризо-

вано следующим образом: $a_1 = -\lambda_1$ есть пограничное значение между теми $a > 0$, для которых $M_x e^{a\tau} < \infty$, $x \in D$, и теми, для которых $M_x e^{a\tau} = \infty$, где $\tau$ — момент первого выхода процесса $x_t$ из $D$, а $M_x$ — математическое ожидание, вычисленное в предположении, что процесс начинается в точке $x$ ($P_x$ — соответствующая вероятность). Пусть $\Gamma$ и $\gamma$ — гладкие замкнутые $(r-1)$-мерные поверхности внутри $D$ (может быть, несвязные), причем $\gamma$ заключено целиком внутри $\Gamma$. Положим по определению $\sigma_1 = \inf\{t \geqslant 0 \colon x_t \in \Gamma\}$, $\tau_1 = \inf\{t \geqslant \sigma_1 \colon x_t \in \gamma \cup \partial D\}$. Определим для $a > 0$ ядро

$$q_a(x, B) = M_x e^{a\tau_1} \chi_B(x_{\tau_1}), \quad B \subseteq \gamma \cup \partial D,$$

где $\chi_B$ — характеристическая функция (борелевского) множества $B$. Введем операторы $q_a$, действующие на меры (со знаком) на $B$:

$$\mu q_a(B) = \int_\gamma \mu(dx)\, q_a(x, B), \quad B \subseteq \gamma.$$

Лемма 1. *Наибольшее собственное значение $\lambda_1(a)$ оператора $q_a$ является пограничным между теми $\lambda > 0$, для которых* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \mu_0 q_a^n < \infty$, *и теми, для которых* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \mu_0 q_a^n = \infty$, *где $\mu_0$ — произвольная положительная мера на $\gamma$. Этому собственному значению отвечает положительная собственная мера $\mu_a$.*

Лемма 2. *$a_1$ (абсолютная величина наибольшего собственного значения оператора $L$) является пограничным значением между теми $a$, для которых $\lambda_1(a) < 1$, и теми, для которых $\lambda_1(a) > 1$; при этом $\lambda_1(a_1) = 1$.*

Лемма 2 является модификацией приема оценки наибольшего собственного значения в ([1]). Доказательство можно провести, используя лемму 1 и то, что

$$\int_\gamma \mu_0(dx)\; M_x e^{a\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \mu_0 q_a^n(dx)\, q_a(x, \partial D).$$

Теперь, если $\gamma$ разбито на непересекающиеся множества $\gamma_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, то мы можем рассмотреть квадратную матрицу $Q(a)$ порядка $l$ с элементами

$$q_{ij}(a) = [\mu_{a_1}(\gamma_i)]^{-1} \int_{\gamma_i} \mu_{a_1}(dx)\, q_a(x, \gamma_i),$$

монотонно и непрерывно зависящими от $a$. Легко проверить, что $\mu_{a_1}(\gamma_i)$, $1 \leqslant i \leqslant l$, является левым собственным вектором матрицы $Q(a_1)$ с собственным значением 1. Так как этот вектор неотрицателен, то 1 — наибольшее собственное значение, и справедлива

Лемма 3. *$a_1$ является пограничным значением между теми $a$, для которых наибольшее собственное значение матрицы $Q(a)$ меньше 1, и теми, для которых оно больше 1.*

2. Теперь перейдем к рассмотрению оператора с малым параметром $L^\varepsilon$ и соответствующего диффузионного процесса $x_t^\varepsilon$ (все обозначения, связанные с ним, будут иметь индекс $\varepsilon$ сверху). Введем отношение эквивалентности, связанное с процессом с малым параметром $x_t^\varepsilon$: $x \sim y$, если $V(x, y) = V(y, x) = 0$. Будем говорить, что выполняется условие $A_D$, если в области $D$ существует конечное число компактов $K_1, K_2, \ldots, K_l$ таких, что точки в пределах одного компакта эквивалентны друг другу, а точка вне компакта не эквивалентна точкам компакта; и $\omega$-предельное множество любого решения системы (1), начинающегося в $D \cup \partial D$

и не выходящего из этого множества, принадлежит одному из $K_i$. Определим $V_{ij}(D)$ как нижнюю грань значений $I(\varphi)$ по функциям $\varphi_t$, не выходящим из $D \cup \partial D$, таким, что $\varphi_{T_1} \in K_i$, $\varphi_{T_2} \in K_j$, причем $\varphi_t$ не задевает ни одного из компактов $K_s$, $s \neq i, j$; $V_{i*}(D)$ — нижняя грань по функциям $\varphi_t$, $\varphi_{T_1} \in K_i$, $\varphi_{T_2} \in \partial D$, не задевающим компактов $K_j$, $j \neq i$ (это определение слегка отличается от данного в ([2]), § 9). Возьмем в качестве $\gamma_i$ границы малых окрестностей компактов $K_i$, $\gamma = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_l$, $\Gamma$ — сумма границ чуть бóльших окрестностей компактов.

Лемма 4. *Для любого $h > 0$ поверхности $\gamma$, $\Gamma$ можно выбрать настолько близко прилегающими к $K = K_1 \cup \ldots \cup K_l$, что $M_x^\varepsilon e^{a\tau_1}$ конечно при $a \leqslant e^{-h/(2\varepsilon^2)}$ при достаточно малых $\varepsilon$. При этом при малых $\varepsilon$ имеют место оценки*

$$1 + ae^{-h/(2\varepsilon^2)} \leqslant q_a^\varepsilon(x, \gamma \cup \partial D) = M_x^\varepsilon e^{a\tau_1} \leqslant 1 + ae^{h/(2\varepsilon^2)}, \qquad x \in \gamma; \tag{2}$$

$$\exp\{(-V_{ij}(D) - h)/(2\varepsilon^2)\} \leqslant q_a^\varepsilon(x, \gamma_j) \leqslant \exp\{(-V_{ij}(D) + h)/(2\varepsilon^2)\}, \qquad x \in \gamma_i; \tag{3}$$

$$\exp\{(-V_{i*}(D) - h)/(2\varepsilon^2)\} \leqslant q_a^\varepsilon(x, \partial D) \leqslant \exp\{(-V_{i*}(D) + h)/(2\varepsilon^2)\}, \quad x \in \gamma_i. \tag{4}$$

Доказательство аналогично доказательству лемм 6.1, 9.2, а также 5.3 статьи ([2]). Наметим доказательство верхней оценки в (2). Оно основывается на следующей оценке: для любых $h > 0$, $\delta > 0$

$$P_x^\varepsilon\{\rho(x_t^\varepsilon, \varphi_t) < \delta,\ 0 \leqslant t \leqslant T\} > \exp\{(-I_{0T}(\varphi) - h)/(2\varepsilon^2)\} \tag{5}$$

при достаточно малых $\varepsilon$ равномерно по всем функциям $\varphi_t$, $\varphi_0 = x$, с $I_{0T}(\varphi) \leqslant C$, $T \leqslant T_0$ (([2]), теорема 1.1). Пользуясь строго марковским свойством относительно момента $\sigma_1$, получаем

$$\sup_{x \in \gamma} M_x^\varepsilon e^{a\tau_1} \leqslant \sup_{x \in \gamma} M_x^\varepsilon e^{a\sigma_1} \sup_{x \in \Gamma} M_x^\varepsilon e^{a\tau_1}.$$

Выберем поверхности $\gamma$, $\Gamma$ лежащими в настолько малой окрестности $K$, чтобы при каком-то положительном $\delta$ для любой точки $x$ внутри $\Gamma$ существовала функция $\varphi_t^x$, $0 \leqslant t \leqslant T(x)$, $\varphi_0^x = x$, $\varphi_{T(x)}^x$ лежит, по крайней мере, на расстоянии $\delta$ вне поверхности $\Gamma$, $T(x) \leqslant T_0 < \infty$, $I(\varphi^x) < h/4$. Тогда оценка (5) дает возможность утверждать, что для всех $x$ внутри $\Gamma$ при достаточно малых $\varepsilon$

$$P_x^\varepsilon\{\sigma_1 \leqslant T_0\} \geqslant e^{-h/(4\varepsilon^2)}.$$

Пользуясь марковским свойством, получаем

$$P_x^\varepsilon\{\sigma_1 > nT_0\} \leqslant (1 - e^{-h/(4\varepsilon^2)})^n$$

для $x$ внутри $\Gamma$, в частности, для $x \in \gamma$. После преобразований имеем

$$M_x^\varepsilon e^{a\sigma_1} \leqslant e^{aT_0} + (e^{aT_0} - 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{anT_0}(1 - e^{-h/(4\varepsilon^2)})^n. \tag{6}$$

Этот ряд сходится, когда $e^{aT_0}(1 - e^{-h/(4\varepsilon^2)}) < 1$; при малых $\varepsilon$ для этого достаточно $a \leqslant e^{-h/(2\varepsilon^2)}$. Для таких $a$ сумма геометрической прогрессии в (6) эквивалентна $e^{h/(4\varepsilon^2)}$ при $\varepsilon \to 0$, так что $M_x^\varepsilon e^{a\sigma_1} \leqslant 1 + ae^{h/(3\varepsilon^2)}$ при $x \in \gamma$ для достаточно малых $\varepsilon$. Оценка $\sup_{x \in \Gamma} M_x^\varepsilon e^{a\tau_1}$ производится таким же образом.

Из леммы 4 получаем, что элементы матрицы $Q(a) = Q^\varepsilon(a)$, введенной выше, оцениваются при $a \leqslant e^{-h/(2\varepsilon^2)}$ и достаточно малом $\varepsilon$ следующим образом: при $j \neq i$ для $q_{ij}^\varepsilon(a)$ имеют место те же оценки, что для $q_a^\varepsilon(x, \gamma_j)$, $x \in \gamma_i$, в (3); а

$$q_{ii}^\varepsilon(a) = [\mu_{a_1^\varepsilon}^\varepsilon(\gamma_i)]^{-1} \int_{\gamma_i} \mu_{a_1^\varepsilon}^\varepsilon(dx)\, q_a^\varepsilon(x, \gamma \cup \partial D) - \sum{}' q_{ij}^\varepsilon(a),$$

где сумма $\Sigma'$ распространяется на все $j \neq i$, в том числе на $j = *$. Для первого слагаемого здесь имеют место те же оценки, что для $q_a^\varepsilon(x, \gamma \cup \cup \partial D)$ в (2), а для $q_{i*}^\varepsilon(a)$ — среднего от $q_a^\varepsilon(x, \partial D)$ — оценки (4). Применение леммы 3 теперь дает возможность свести задачу оценки наибольшего собственного значения оператора $L^\varepsilon$ к задаче о том, при каком $a$ наибольшее собственное значение матрицы $Q^\varepsilon(a)$ с данными оценками для элементов равно 1.

В частном случае, когда система (1) имеет единственное, причем устойчивое, положение равновесия $x_0$, имеем $l = 1$, $K_1 = \{x_0\}$, $V_{1*}(D) = V_0 = \min_{y \in \partial D} V(x_0, y)$;

$$1 + ae^{-h/(2\varepsilon^2)} - \exp\{(-V_0 + h)/(2\varepsilon^2)\} \leqslant q_{11}^\varepsilon(a) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + ae^{h/(2\varepsilon^2)} - \exp\{(-V_0 - h)/(2\varepsilon^2)\}$$

при $a \leqslant e^{-h/(2\varepsilon^2)}$ и достаточно малом $\varepsilon$. Поэтому $a_1^\varepsilon$ — пограничное значение между теми $a$, для которых $q_{11}^\varepsilon(a) < 1$ и $q_{11}^\varepsilon(a) > 1$,— лежит в пределах от $\exp\{(-V_0 - 2h)/(2\varepsilon^2)\}$ до $\exp\{(-V_0 + 2h)/(2\varepsilon^2)\}$. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Заметим, что все приведенные результаты переносятся также на дифференциальные операторы и диффузионные процессы на дифференцируемом многообразии.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. З. Хасьминский, Теория вероятностей и ее применения, 4, № 3, 332 (1959). [2] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, УМН, 25, 1 (151), 3 (1970).