

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

С. М. ЕРМАКОВ, В. С. НЕФЕДОВ

ОБ ОЦЕНКАХ СУММЫ РЯДА НЕЙМАНА ПО МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО

(Представлено академиком Ю. В. Линником 4 VI 1971)

Пусть однородная цепь Маркова задана плотностью начального распределения $p(y)$ и переходной плотностью $p(y \rightarrow x)$, $y, x \in D$ — области конечномерного евклидова пространства и

$$\int_D p(y \rightarrow x) dx = 1 - g(y), \quad 0 \leq g(y) < 1, \quad y \in D.$$

Согласно схеме Неймана — Улама ⁽¹⁾, сумма ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_D dx_0 \dots \int_D dx_i f_0 K_{0,1} \dots K_{i-1,i} h_i, \quad (1)$$

где $f_0 = f(x_0)$, $K_{j-1,j} = K(x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \dots, i$, $h_i = h(x_i)$, может быть оценена с помощью среднего арифметического значений некоторой функции $\hat{J}$, определенной на траекториях цепи, при условии

$$p(y) > 0, \text{ если } f(y) \neq 0, \text{ и } p(y \rightarrow x) > 0, \text{ если } K(y, x) \neq 0. \quad (2)$$

При этом предполагается сходимость в соответствующей метрике ряда Неймана для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int_D K(y, x) \varphi(y) dy + f(x).$$

Для простоты полагаем $\varphi \in L_p$, $f \in L_p$ ($p \geq 1$) и оператор с ядром $K(y, x)$ действует из L_p в L_p , хотя результаты, излагаемые ниже, можно также легко обобщить на случай других линейных нормированных пространств. Принадлежность h к L_q ($1/p + 1/q = 1$) гарантирует сходимость ряда (1), и, как легко видеть, его сумма есть $(\varphi, h) = \int_D \varphi(x) h(x) dx$.

Пусть $g > 0$ в D , $\Xi_k = x_0, x_1, \dots, x_k$ — траектория цепи Маркова, x_k — точка ее обрыва и

$$\hat{J} = \sum_{i=0}^k q_i \omega_i^{(k)}(\Xi_k) h_i,$$

где $q_0 = f_0 / p_0$, $q_j = q_{j-1} K_{j-1,j} / p_{j-1,j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, а $\omega_i^{(k)}$ — заданные функции траектории. Предполагаем, что функция $\sum_{i=0}^k |q_i \omega_i^{(k)} h_i|$ интегрируема на множестве траекторий цепи, $\omega_i^{(k)}$ не зависят от вида функций f, h и K и оценка $\hat{J}$ является несмещенной оценкой функционала (φ, h) . Достаточные условия несмещенности оценок (3) рассматривались Хисамутдиновым ⁽²⁾. Им же получены некоторые результаты относительно дисперсий оценок, удовлетворяющих этим условиям (см. также ⁽³⁾). Ниже обсуждаются некоторые общие свойства оценок вида (3).

При обозначениях $R_k = \underbrace{D \times \dots \times D}_{k+1}$ и $g_k = g(x_k)$ справедлива

Теорема 1. Если функция $\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k |q_i q_j \omega_i^{(k)} \omega_j^{(k)} h_i h_j|$ интегрируема на множестве траекторий цепи Маркова, то дисперсия оценки $\hat{J}$ выражается равенством

$$\begin{aligned} D\hat{J} &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{R_i} \frac{f_0^2 K_{0,1}^2 \dots K_{i-1,i}^2}{p_0 p_{0,1} \dots p_{i-1,i}} h_i a_i(\Xi_i) d\Xi_i - (\varphi, h)^2, \\ a_i(\Xi_i) &= h_i \sum_{k=i}^{\infty} \int_D dx_{i+1} \dots \int_D dx_k (\omega_i^{(k)}(\Xi_k))^2 p_{i,i+1} \dots p_{k-1,k} g_k + \\ &+ 2 \sum_{j=i+1}^{\infty} \int_D dx_{i+1} \dots \int_D dx_j K_{i,i+1} \dots K_{j-1,j} h_j \sum_{k=j}^{\infty} \int_D dx_{j+1} \dots \int_D dx_k p_{j,j+1} \dots \\ &\dots p_{k-1,k} g_k \omega_i^{(k)}(\Xi_k) \omega_j^{(k)}(\Xi_k). \end{aligned}$$

Если a_i не зависит от i , что имеет место в важном частном случае, когда $\omega_i^{(k)}$ зависят лишь от разности индексов $k - i = l$ и переменных $x_i, x_{i+1}, \dots, x_k$, то непосредственным следствием теоремы 1 является

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и $a_i(\Xi_i) = a_i(x_i)$, то имеет место равенство

$$D\hat{J} = \int_D \psi(x) h(x) a(x) dx - (\varphi, h)^2, \quad (4)$$

а также двойственное к (4) равенство

$$D\hat{J} = \int_D \psi^*(x) \frac{f^2(x)}{p(x)} dx - (\varphi, h)^2, \quad (5)$$

где $\psi(x)$ есть решение уравнения

$$\psi(x) = \int_D \frac{K^2(y, x)}{p(y \rightarrow x)} \psi(y) dy + \frac{f^2(x)}{p(x)},$$

а $\psi^*(x)$ — решение уравнения

$$\psi^*(x) = \int_D \frac{K^2(x, y)}{p(x \rightarrow y)} \psi^*(y) dy + a(x) h(x).$$

Сформулированные теоремы являются удобным средством для вычисления дисперсий конкретных оценок. Так, например, для семейства оценок

$$\hat{J}_m = q_{k-m} \frac{h_{k-m}}{g_k} + \sum_{i=k-m+1}^k q_i h_i$$

(m целое, $q_i = 0$ при $i < 0$), рассмотренного в ⁽⁴⁾, получаем

$$a(x_i) = h_i \int_D dx_{i+1} \dots \int_D dx_k p_{i,i+1} \dots p_{k-1,k} \left(\frac{1}{g_k} - 1 \right) + 2\varphi^* - h_i - [K^{*(m+1)} \varphi^*]_i,$$

где φ^* есть решение уравнения

$$\varphi^*(x) = \int_D K(x, y) \varphi^*(y) dy + h(x),$$

а $K^{*(m+1)}$ есть оператор с $(m+1)$ -м итерированным ядром ядра $K(x, y)$. Полученные результаты позволяют обсудить также следующие общие вопросы.

А) Конечность дисперсии. В⁽⁵⁾ приводится пример такого $K = K_0$, что $\|K_0\| < 1$, но $\|K_0^2 / p\| > 1$ при любой $p(y \rightarrow x)$, и дисперсия простейшей оценки, для которой $\omega_i^{(K)} \equiv 1$, может быть бесконечной. Из теоремы 2 следует, что при $a_i(\Xi_i) = a(x_i)$ аналогичное утверждение имеет место для любой оценки. Поскольку для большинства известных оценок $a_i(\Xi_i) = a(x_i)$, то отсюда следует необходимость изучения более сложных оценок (по крайней мере в задачах, связанных с решением систем линейных алгебраических уравнений).

Б) Редукция проблемы оценивания. Пусть $\mathcal{H} = \{f, K, h\}$ есть некоторое множество троек f, K и h , $\Pi = (p(y), p(y \rightarrow x)) \in \mathcal{P}$ — заданному множеству цепей Маркова таких, что выполнены условия (2) при любых Π из $\mathcal{P}$ и (f, K, h) из $\mathcal{H}$, и $\mathcal{L} = \{\hat{J}\}$ — множество несмещенных оценок функционала (f, h) таких, что $D\hat{J} < +\infty$. Будем говорить, что $\hat{J}'$ доминирует $\hat{J}$ ($\hat{J}', \hat{J} \in \mathcal{L}$) в $\mathcal{L}$ для $\mathcal{H}$ и $\mathcal{P}$, если для любых (f, K, h) из $\mathcal{H}$ и Π из $\mathcal{P}$ имеет место неравенство $D\hat{J}' \leq D\hat{J}$ и строгое неравенство имеет место хотя бы для одного (f, K, h) из $\mathcal{H}$ или хотя бы для одного Π из $\mathcal{P}$. Допустимой оценкой в $\mathcal{L}$ для $\mathcal{H}$ и $\mathcal{P}$ будем называть такую, для которой нет доминирующей ее оценки в $\mathcal{L}$. Описание класса допустимых оценок, как обычно, позволяет осуществить редукцию проблемы оценивания, т. е. отбросить заведомо «плохие» оценки. При этом необходимы оговорки относительно количества вычислительной работы, аналогичные сделанным в⁽⁶⁾.

Следующий пример позволяет убедиться в содержательности задачи описания класса допустимых оценок. Пусть множество $\mathcal{P}$ таково, что для $\Pi \in \mathcal{P}$ выполнены неравенства $0 < \alpha \leq g(y) \leq \beta < 1$. Положим

$$\omega_l(x) = \begin{cases} 1/g^{(l)}(x), & l = m \geq 0, \\ 0, & l \neq m, \end{cases}$$

где $g^{(l)}(x) = \int_D dx_1 \dots \int_D dx_l p_{0,1} \dots p_{l-1,l} g_l$. Несмещенность соответ-

ствующей $\hat{J}_m$ легко проверить. В данном случае $a(x) = h(x) / g^{(m)}(x)$ и $M\hat{J}_m^2 = (\psi, h^2 / g^{(m)})$. Отсюда следует

$$\beta^{-1}(1 - \alpha)^{-m}(\psi, h^2) \leq M\hat{J}_m^2 \leq \alpha^{-1}(1 - \beta)^{-m}(\psi, h^2)$$

и существует такое m_1 , что для всех $n > m_1$ $\hat{J}_1$ доминирует $\hat{J}_n$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
23 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. E. Forsythe, R. Z. Leibler, Math. Tables and other Aids to Comp., 4, 127 (1950). ² А. И. Хисамутдинов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 10, № 5, 1269 (1970). ³ Л. Б. Майоров, А. Д. Франк-Каменецкий, Сравнительная эффективность различных оценок в методе Монте-Карло, Препринт ИАЭ им. И. В. Курчатова, М., 1969. ⁴ Г. А. Михайлов, Теория вероятностей и ее применения, 15, 1, 142 (1970). ⁵ J. H. Halton, SIAM Rev., 12, № 1, 1 (1970). ⁶ С. М. Ермаков, Методы вычислений, в. 6, Л., 1970, стр. 72.