Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 62-501.11+512.86 *МАТЕМАТИКА*

Л. Е. КАНАРЕВ

О ПОДОБИИ МАТРИЦ И ПРИВЕДЕНИИ К КАНОНИЧЕСКИМ ФОРМАМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 10 III 1969)

Пусть X — n-мерное вещественное векторное пространство, $\mathscr{A}$ — класс всех постоянных, вещественных $(n\times n)$-матриц, n — натуральное число.

Определение. Строчный вектор $\bar{p}'\in X$ называется вектором ранга k для матрицы $A\in\mathscr{A}$, если k — наибольшее натуральное число такое, что система векторов $\bar{p}', \bar{p}'A, \ldots, \bar{p}'A^{k-1}$ линейно независима.

Введем набор целых чисел $(r, k_1, k_2, \ldots, k_r) \equiv \bar{k}(r)$, $1\leqslant r\leqslant n$, $0\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\ldots\leqslant k_r\leqslant n$, $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j = n$.

Определение. Пусть дан набор $\bar{k}(r)$. Набор $(\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_r)$ векторов из X рангов $k_1, k_2, \ldots, k_r$ для матрицы $A\in\mathscr{A}$ называется полным для A, если r — наименьшее натуральное число такое, что система $(\bar{p}_i'$, $\bar{p}_i'A, \ldots, \bar{p}_i'A^{k_i-1}$, $i=1, 2, \ldots, r)$ линейно независима.

Определение. Пусть $A\in\mathscr{A}$ $(\bar{p}_i',\ i=1, 2, \ldots, r)$ — полный набор векторов для A. Образуем матрицу P, заполняя ее снизу строчными векторами $\bar{p}_1', \bar{p}_1'A, \ldots, \bar{p}_1'A^{k_1-1}, \bar{p}_2', \bar{p}_2'A, \bar{p}_2'A^{k_2-1}, \ldots, \bar{p}_r'\bar{p}_r'A, \ldots, \bar{p}_r'A^{k_r-1}$. Матрица P называется полной для A.

Обозначим класс полных для $A\in\mathscr{A}$ матриц символом $\mathscr{P}_A$. Введем полный набор $(\varphi_i(\lambda),\ i=1, 2, \ldots, r)$ инвариантных многочленов ([1]) матрицы $A\in\mathscr{A}$, $\varphi_i(\lambda)=\lambda^{k_i}+a_1^{(i)}\lambda^{k_i-1}+\cdots+a_{k_i-1}^{(i)}\lambda+a_{k_i}^{(i)}$; $1\leqslant r\leqslant n$; $0\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\ldots$ $\ldots\leqslant k_r\leqslant n$; $\sum\limits_{j=1}^{r}k_j=n$; $r, k_1, k_2, \ldots k_r$ — целые числа, $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_{k_i}^{(i)}\in\mathscr{R}$, $\lambda\in\mathscr{C}$; $\mathscr{R}$ и $\mathscr{C}$ — поля вещественных и комплексных чисел соответственно. Определим для $\varphi_i(\lambda)$ сопровождающие матрицы равенством

$$L_i=\begin{pmatrix} -a_1^{(i)} & -a_2^{(i)} & \ldots & -a_{k_i-1}^{(i)} & -a_{k_i}^{(i)} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и образуем матрицу $L=\{L_r, \ldots, L_2, L_1\}$. Матрица L есть первая нормальная форма для A.

Теорема 1. *Матрица $P\in\mathscr{A}$ является полной для $A\in\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда*

$$PAP^{-1}=L. \tag{1}$$

Доказательство 1) Пусть $P\in\mathscr{P}_A$. Тогда равенство (1) имеет место по определению полной матрицы для A, так как, ввиду минимального количества векторов полного набора, совокупность минимальных многочленов ([1]) всех векторов каждого такого набора совпадает с совокупностью инвариантных многочленов матрицы A.

2) Пусть P удовлетворяет равенству (1). Тогда $PA=LP$. Специальный вид матрицы L показывает, что в качестве полного набора векторов для A

можно выбрать векторы-строки матрицы P с номерами n, $n-k, \ldots$ $\ldots, n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-1}$. Теорема доказана.

Формула (1) показывает, что любая полная для $A \in \mathscr{A}$ матрица P является матрицей перехода к первой нормальной форме.

Теорема 2 (критерий подобия). *Матрицы $A \in \mathscr{A}$ и $J \in A$ подобны тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P_1 \in \mathscr{P}_A$ и $P_2 \in \mathscr{P}_J$ такие, что $P_1AP_1^{-1} = P_2JP_2^{-1}$.*

Доказательство 1) Пусть A и J подобны. Тогда они имеют общую первую нормальную форму и подобны ей. Тогда по теореме 1 существуют матрицы $P_1 \in \mathscr{P}_A$ и $P_2 \in \mathscr{P}_J$ такие, что $P_1AP_1^{-1} = L$, $P_2JP_2^{-1} = L$, т. е. $P_1AP_1^{-1} = P_2JP_2^{-1}$.

2) Пусть существуют $P_1 \in \mathscr{P}_A$, $P_2 \in \mathscr{P}_J$ такие, что $P_1AP_1^{-1} = P_2JP_2^{-1}$. Тогда $J = P_2^{-1}P_1AP_1^{-1}P_2$. Положим

$$T = P_2^{-1}P_1. \tag{2}$$

Тогда $J = TAT^{-1}$, т. е. матрицы A и J подобны. Теорема доказана.

Формула (2) показывает, что для любых $P_1 \in \mathscr{P}_A$ и $P_2 \in \mathscr{P}_J$ матрица T является матрицей перехода от $A \in \mathscr{A}$ к подобной ей матрице $J \in \mathscr{A}$. В частности, в качестве J может быть выбрана вторая нормальная форма (Жордана) для A (над полем $\mathscr{R}$).

Приложение к теории управления. Пусть движение материальной системы задано уравнением

$$d\bar{x} / dt = A\bar{x} + \bar{b}_1u_1 + \bar{b}_2u_2 + \ldots + \bar{b}_ru_r, \tag{3}$$

$\bar{x} \in X$, $A \in \mathscr{A}$, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ — неопределенные вещественные параметры — управления, $\bar{b}_i'$ имеет ранг l_i для A', $i = 1, 2, \ldots, r$.

Определения. 1) Матрица A называется r-связной, если она имеет ровно r инвариантных многочленов; 2) система (3) называется r-связной, если ее матрица r-связна; 3) система (3) называется вполне управляемой, если система векторов ($\bar{b}_i, A\bar{b}_i, \ldots, A^{l_i-1}\bar{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$) содержит n линейно-независимых векторов.

Из теоремы 1 следует

Теорема 3 (критерий связности). *Матрица A r-связна тогда и только тогда, когда полный набор векторов для нее состоит из r векторов.*

Следствие. *Для полной управляемости r-связной системы необходимо не менее r управлений.*

Определение. Система (3) называется связанной по управлению, если она r-связна и не существует линейного преобразования координат, приводящего ее к семейству r односвязных, независимых подсистем меньшего порядка. В противном случае система (3) называется развязываемой по управлению.

Теорема 4 (критерий развязываемости по управлению). *Линейная r-связная вполне управлямая система* (3) *развязываема по управлению тогда и только тогда, когда векторы $\bar{b}_1', \bar{b}_2', \ldots, \bar{b}_r'$ составляют полный набор для A'.*

Поступило
3 III 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», 1967.