Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

В. И. КУЗЬМИНОВ, И. А. ШВЕДОВ

О ГОМОЛОГИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ КОГОМОЛОГИЧЕСКИМИ ФУНКТОРАМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 29 III 1971)

Для каждого универсального когомологического функтора, заданного на категории предпучков, мы рассматриваем коцепные функторы C^*, порождающие этот когомологический функтор. Следуя Борелю и Муру, мы определяем гомологии как гипергомологии комплекса C^* для функтора Hom. Оказывается, что эти гомологии не зависят от выбора коцепного комплекса и полностью определяются исходным когомологическим функтором.

Распространение функтора гомологий на категорию предпучков дало возможность охарактеризовать гомологии как сателлиты функтора нульмерных гомологий. Кроме того, это распространение позволило определить теорию гомологий на категории топологических пространств, удовлетворяющую всем аксиомам Эйленберга — Стинрода и связанную формулой универсальных коэффициентов с когомологиями Александрова — Чеха.

Терминология и обозначения заимствованы из ([1]).

Пусть X — произвольное топологическое пространство, L — наследственное кольцо $\mathscr{L}$ — категория L-модулей, $\mathscr{L}(X)$ — категория предпучков L-модулей над X, $\mathscr{C}$ — категория коцепных комплексов L-модулей. Мы рассматриваем только такие коцепные комплексы C^*, у которых $C^n = 0$ при $n < 0$ и дифференциал имеет степень $+1$.

Если в последовательности коцепных комплексов

$$0 \to C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3 \to 0 \qquad (1)$$

$\psi \circ \varphi = 0$, то определено аддитивное отношение (т. е. частично определенный и многозначный гомоморфизм) групп когомологий $\partial^n\colon H^n(C_3) \to H^{n+1}(C_1)$. Это отношение совпадает с граничным гомоморфизмом для короткой точной последовательности комплексов.

Последовательность (1) называется *короткой квазиточной* последовательностью, если отношение ∂^n для каждого n является гомоморфизмом, а последовательность

$$\cdots \to H^n(C_1) \to H^n(C_2) \to H^n(C_3) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(C_1) \to \cdots$$

точна.

Будем рассматривать последовательность (1) как двойной комплекс, считая φ и ψ дополнительными дифференциалами. Последовательность (1) квазиточна тогда и только тогда, когда гомологии этого двойного комплекса относительно полного дифференциала равны нулю.

Ковариантный функтор $C\colon \mathscr{L} \to \mathscr{C}$ будем называть коцепным функтором, если он переводит короткие точные последовательности предпучков в короткие квазиточные последовательности комплексов. Аналогичным образом определяются *цепные функторы* (контравариантные). Отметим, что цепные комплексы, в отличие от коцепных, могут иметь элементы отрицательных степеней.

Теорема 1. *Пусть M — произвольный L-модуль, M^* — его инъективная резольвента конечной длины.*

Тогда для каждого коцепного функтора C функтор $\mathrm{Hom}(C(-), M^*)$ *является цепным функтором.*

Пусть задан некоторый когомологический функтор $\{h^*, \partial^*\}$ на категории $\mathscr{L}(x)$ (([1]), п. 2.1). Будем говорить, что этот когомологический функтор порождается коцепным функтором $C: \mathcal{L}(x) \to \mathcal{C}$, если когомологические функторы $\{h^*, \partial^*\}$ и $\{H^*(C), \partial^*\}$ изоморфны.

Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок над X, $C: \mathcal{L}(X) \to \mathcal{C}$ — коцепной функтор и M — произвольный L-модуль. Группу $H^n(C(\mathcal{F}))$ назовем *n*-мерной группой когомологий пространства X, соответствующей коцепному функтору C, и обозначим через $H^n(X, \mathcal{F})_C$. Группу $H_n(\mathrm{Hom}_L(C(\mathcal{F}), M^*))$ назовем *n*-мерной группой гомологий пространства X, соответствующей коцепному функтору C, и обозначим через $H_n(X, \mathcal{F}, M)_C$.

Гомологический функтор $H_*(X, -, M)_C$ не зависит от выбора инъективной резольвенты M^* модуля M. Группы $H^*(X, \mathcal{F}, M)_C$ образуют гомологический функтор не только по аргументу $\mathcal{F}$, но и по аргументу M. Гомологический функтор $H_*(X, -, -)_C$ двух аргументов будем называть теорией гомологий, соответствующей коцепному функтору C.

Группы $H_*(X, \mathcal{F}, M)_C$ совпадают с группами гипергомологий комплекса $C(\mathcal{F})$ для функтора $\mathrm{Hom}_L(-, M)$ (([1]), п. 2.4). Следовательно, справедлива формула универсальных коэффициентов

$$0 \to \mathrm{Ext}_L(H^{n+1}(X, \mathcal{F})_C, M) \to H_n(X, \mathcal{F}, M)_C \to \mathrm{Hom}_L(H^n(X, \mathcal{F})_C, M) \to 0.$$

Из этой формулы следует, что $H_n(X, \mathcal{F}, M)_C = 0$ при $n \leqslant -2$.

Каждый морфизм (естественное преобразование) коцепных функторов $\eta: C_1 \to C_2$ порождает морфизмы $\eta^*: H^*(X, -)_{C_1} \to H^*(X, -)_{C_2}$ и $\eta_*: H_*(X, -, -)_{C_2} \to H_*(X, -, -)_{C_1}$.

Лемма 1. *Допустим, что морфизм η^*, порожденный морфизмом $\eta: C_1 \to C_2$ есть изоморфизм, тогда η_* — также изоморфизм.*

Теорема 2. *Пусть $T: \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ — произвольный ковариантный аддитивный функтор.*

Тогда существует коцепной функтор $C: \mathcal{L}(X) \to \mathcal{C}$, порождающий правый производный когомологический функтор от T. Для любых двух таких коцепных функторов соответствующие им теории гомологий изоморфны.

Теорию гомологий, соответствующую коцепному функтору C, порождающему правый производный когомологический функтор от T, будем называть теорией T-гомологий. Эта теория определена однозначно с точностью до изоморфизма. Группы T-гомологий пространства X условимся обозначать через $T - H_*(X, \mathcal{F}, M)$.

Теорема 3. *Для каждого ковариантного аддитивного функтора $T: \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ T-гомологии $T - H_n(X, -, M)$ при $n \geqslant 0$ являются левыми сателлитами функтора $T - H_0(X, -, M)$.*

Рассмотрим два важных примера T-гомологий. Пусть Φ — семейство носителей на X, которое вместе с каждым своим элементом содержит и некоторую его окрестность. Обозначим через I функтор, который каждому предпучку ставит в соответствие пучок, им порожденный, а через Γ_Φ — функтор, который каждому предпучку $\mathcal{F}$ ставит в соответствие модуль сечений с носителями в Φ пучка $I\mathcal{F}$. Известно ([2]), что правый производный функтор от Γ_Φ изморфен функтору $H_\Phi^*(X, I(-))$.

Обозначим через $\check{\Gamma}_\Phi$ функтор $\check{H}_\Phi^0(X, \mathcal{F})$ нульмерных когомологий Александрова — Чеха пространства X с коэффициентами в $\mathcal{F}$ и носителями в Φ. Известно ([3]), что когомологии Александрова — Чеха $\check{H}_\Phi^*(X, -)$ являются правым производным функтором от $\check{\Gamma}_\Phi$. Функторы Γ_Φ и $\check{\Gamma}_\Phi$ совпадают, если Φ — паракомпактифицирующее семейство.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, c — семейство компактных носителей на X, L — постоянный предпучок, значение которого на каждом открытом множестве совпадает с кольцом L. Тогда группы гомологий $\Gamma_c - H_*(X, L, L)$ изоморфны группам гомологий Бореля — Мура ([4]) пространства X.

Укажем некоторые примеры коцепных функторов, порождающих когомологические функторы H_Φ^* и $\check{H}_\Phi^*$.

а) Пусть $\Omega = \{\omega_i, \pi_j^i\}$, $i, j \in J$, — какой-нибудь транзитивный спектр открытых покрытий пространства X над направленным множеством J, конфинальный в системе всех открытых покрытий. Обозначим через $C_\Phi^*(\omega, \mathcal{F})$ комплекс коцепей покрытия ω с коэффициентами в предпучке $\mathcal{F}$ и носителями в Ф. Коцепной функтор $\check{C}_\Phi^* = \underrightarrow{\lim}_J C_\Phi^*(\omega, -)$ порождает когомологический функтор $\check{H}_\Phi^*(X, \mathcal{F})$. Поэтому для вычисления групп гомологий $\check{\Gamma}_\Phi^* - H_*(X, \mathcal{F}, M)$ можно использовать цепной комплекс $\mathrm{Hom}_L(\check{C}_\Phi^*, M^*)$.

Если X — локально компактное пространство, Ω — спектр локально конечных открытых покрытий и $\mathcal{F} = L$, то коцепной комплекс $\check{C}_c^*$ состоит из проективных L-модулей. В этом случае отображение цепных комплексов $\mathrm{Hom}_L(\check{C}_c^*, M) \to \mathrm{Hom}_L(\check{C}_c^*, M)$, индуцированное вложением $M \to M^*$ модуля в его инъективную резольвенту, порождает изоморфизм групп гомологий. Тем самым, группы гомологий $\check{\Gamma}_c - H_*(X, L, M)$ для локально компактного X можно вычислять с помощью цепного комплекса $\mathrm{Hom}_L(\check{C}_c^*, M)$. Аналогичное рассуждение для спектра Ω, состоящего из замкнутых локально конечных покрытий позволяет установить, что группы $\check{\Gamma}_c - H_*(X, L, M)$ изоморфны группам гомологий, введенным в ([5]) для метризуемых локально компактных пространств.

Теорема 4. *Пусть X — локально компактное пространство и c — семейство компактных носителей на X.*

Тогда группы $\check{\Gamma}_c - H_n(X, -, M)$ *при $n < 0$ являются правыми сателлитами функтора $\check{\Gamma}_c - H_0(X, -, M)$.*

б) Будем рассматривать предпучок $\mathcal{F}$ над X как спектр L-модулей над частично упорядоченным множеством всех открытых подмножеств пространства X. В категории спектров предпучок $\mathcal{F}$ имеет так называемую резольвенту Росса $\mathcal{F}^*$, состоящую из $\underleftarrow{\lim}$ — ациклических спектров ([6]). Функторы $\Gamma_\Phi \mathcal{F}^*$ и $\check{\Gamma}_\Phi \mathcal{F}^*$ являются точными коцепными функторами, порождающими когомологические функторы $H_\Phi^*(X, I(-))$ и $\check{H}_\Phi^*(X, -)$ соответственно.

в) Пусть I^* — резольвента функтора I, обладающая следующими свойствами: 1) функтор I^* переводит мономорфизмы в мономорфизмы, 2) для каждого предпучка $\mathcal{F}$ комплекс $I^*\mathcal{F}$ образует Γ_Φ-ациклическую резольвенту пучка $I\mathcal{F}$. Тогда функтор $\Gamma_\Phi I^*$ является коцепным функтором, порождающим когомологический функтор $H_\Phi^*(X, I(-))$. Условиям 1) и 2) удовлетворяет резольвента вида $I^* = S^* \circ I$, где S^* — каноническая вялая резольвента Годемана. Кроме того, когда семейство носителей паракомпактифицирующее, в качестве S^* можно взять либо резольвету коцепей Александера — Спейнера, либо резольвенту коцепей Александрова — Чеха.

Пусть Y — замкнутое множество пространства X, $U = X \setminus Y$ и Ф — семейство всех замкнутых множеств пространства X. Обозначим через L_U предпучок, равный L на открытых множествах из U и равный 0 на других открытых множествах, а через $H^*(X, Y, M)$ группу гомологий $\Gamma_\Phi - H_*(X, L_U, M)$.

Теорема 5. *Группы $H_*(X, Y, M)$ образуют теорию гомологий в смысле Эйленберга — Стинрода на категории всех топологических пространств.*

Возникающий в связи с теоремой 2 вопрос о существовании и единственности гомологической теории, связанной с заданным когомологическим функтром формулой универсальных коэффициентов, остается открытым.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
26 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Гротендик, О некоторых вопросах гомологической алгебры, М., 1961. [2] R. Deheuvels, Bull. Soc. Math. France, 90, № 2, 261 (1962). [3] G. Nöbeling, Bonner Math. Schr., № 12, 1 (1960). [4] A. Borel, J. C. Moore, Michigan Math. J., 7, № 2, 137 (1960). [5] Е. Г. Скляренко, УМН, 24, 5, 87 (1969). [6] В. И. Кузьминов, Сибирск. матем. журн., 5, 333 (1967).