Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 517.934 *МАТЕМАТИКА*

Л. М. КУПЕРМАН, Ю. М. РЕПИН

К ВОПРОСУ ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 29 III 1971)

Вопрос об управляемости в банаховом пространстве обсуждался в ряде работ. В частности, в ([1]) приведены условия ε-управляемости в пространстве Банаха, а в ([2]) указана возможность неуправляемости в гильбертовом пространстве.

В настоящей заметке доказывается неуправляемость любой линейной динамической системы с ограниченным оператором в бесконечномерном банаховом пространстве (если управляющее воздействие конечномерно).

Пусть E — банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор, отображающий E в себя. Рассмотрим уравнение движения в обобщенной форме

$$dx = Ax\,dt + b\,d\sigma(t), \tag{1}$$

где $x, b \in E$, t — вещественная переменная $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$, скалярная функция $\sigma(t)$, называемая обобщенным управлением, принадлежит пространству $V[t_0, T]$ функций ограниченной вариации. Движение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1), которое удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$, определяется при $t \in [t_0, T]$ формулой Коши

$$x(t) = \exp A(t-t_0)\cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp A(t-\tau)\cdot b\,d\sigma(\tau). \tag{2}$$

При этом уравнение (1) можно рассматривать как символическое указание на то, что движение $x(t)$ управляемого объекта описывается соотношением (2), где интеграл понимается в смысле Стилтьеса.

Уравнение (1) соответствует случаю одномерного управляющего воздействия, произвольному конечномерному управлению соответствует уравнение

$$dx = Ax\,dt + \sum_{i=1}^{m} b_i\,d\sigma_i(t). \tag{3}$$

Для простоты изложения ограничимся случаем $m = 1$, так как ход рассуждений полностью сохраняется для произвольного m.

Динамическую систему (1) называют ([3]) управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, если для любых точек x_0, x_1, принадлежащих пространству E, существует управление $\sigma(t)$ из пространства $V[t_0, T]$, переводящее систему из состояния $x(t_0) = x_0$ в состояние $x(T) = x_1$.

Покажем, что в том случае, когда банахово пространство является бесконечномерным, система (1) оказывается неуправляемой на любом отрезке времени $[t_0, T]$. Более того, справедлива

Теорема. *Если E — бесконечномерное банахово пространство, то*

1) *для любой точки $x_0 \in E$ существует точка $x_1 \in E$ такая, что для любой $\sigma(t) \in V[t_0, T]$ имеет место $x(T) \neq x_1$, если $x(t_0) = x_0$;*

2) *для любой точки $x_1 \in E$ существует точка $x_0 \in E$ такая, что для любой $\sigma(t) \in V[t_0, T]$ имеет место $x(T) \neq x_1$, если $x(t_0) = x_0$.*

Сформулируем прежде всего следующее утверждение.

Лемма. *Если $f(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ абстрактная функция числового аргумента со значениями в банаховом пространстве E, то оператор B, определенный равенством $B(\sigma) = \int\limits_a^b f(t)\,d\sigma(t)$, отображает $V[a, b]$ в E вполне непрерывно.*

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо и для оператора B, определенного равенством $Bu = \int\limits_a^b f(t)\,u(t)\,dt$, где $f(t)$ — непрерывная абстрактная функция, $u \in L_p[a, b]$, $p \geqslant 1$, или $u \in C[a, b]$, а также для оператора B, имеющего вид $Bu = \int\limits_\Gamma f(\lambda)\,u(\lambda)\,d\lambda$, где $f(\lambda)$ — непрерывная функция комплексного переменного со значениями в E, а $u(\lambda)$ — элемент пространства C_Γ непрерывных функций комплексного переменного на спрямляемой жордановой кривой Γ.

Переходя к доказательству теоремы, заметим, что область значений $R(B)$ произвольного линейного вполне непрерывного оператора B, отображающего банахово пространство X в бесконечномерное банахово пространство Y, не может заполнять все Y. Действительно, если $R(B) = Y$ и ядро оператора B равно нулю, то по теореме Банаха ([4]) оператор B имеет ограниченный обратный, что невозможно в силу его полной непрерывности и бесконечномерности Y. Если ядро оператора B отлично от нуля, то приходим к противоречию тем же путем, рассматривая вместо X его фактор-пространство по ядру оператора B и вместо B — вполне непрерывный оператор, канонически порожденный оператором B на упомянутом фактор-пространстве.

В силу соотношения (2) $x(T) = \exp A(T - t_0)\cdot x_0 + B\sigma$, где оператор B вполне непрерывен по сформулированной лемме. Теперь для доказательства первого (соответственно второго) утверждения теоремы достаточно положить $x_1 = \exp A(T - t_0)\cdot x_0 + y$ (соответственно $x_0 = \exp[-A(T - t_0)]\cdot(x_1 - y)$), где $y \in E$, $y \notin R(B)$.

Полученный отрицательный ответ на вопрос об управляемости системы (1) можно еще усилить следующим образом. Полагая в формуле (2) $x_0 = 0$, $t_0 = 0$ и $t = T$, получим представление множества точек $x \in E$, достижимых из начала координат за время T, в виде области значений оператора B_T

$$x(T) = \int\limits_0^T \exp A(T - \tau)\cdot b\,d\sigma(\tau) = B_T\sigma. \tag{4}$$

После замены переменной $T - \tau = s$, имеем

$$x(T) = \int\limits_0^T \exp As\cdot b\,d\mu(s) = S_T\mu, \tag{5}$$

где $\mu(s) = -\sigma(T - s)$, $\mu(s) \in V[0, T]$.

Обозначим рассматриваемую область значений $R(B_T) = R(S_T)$ символом G_T. Это линейное многообразие, как показано выше, ни при одном значении T не исчерпывает всего E. Нетрудно убедиться, что если $T_1 < T_2$, то $G_{T_1} \subset G_{T_2}$. Покажем, что даже линейное многообразие $G = \bigcup\limits_{T>0} G_T$ не исчерпывает всего E. Действительно ([5]), $\exp As = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \exp \lambda s\cdot R(\lambda, A)\,d\lambda$, где Γ — окружность, заключающая спектр оператора A, и $R(\lambda, A)$ — резольвента. Поэтому

$$x(T)=\int_0^T \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp\lambda s\cdot R(\lambda,A)\,d\lambda\cdot b\,d\mu(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda,$$

где $f(\lambda)=\int_0^T \exp\lambda s\cdot d\mu(s)$ (и поэтому является целой функцией экспоненциального типа). Пусть D — линейное многообразие всех $x\in E$, допускающих представление вида $x=g(A)\,b$, где $g(\lambda)$ пробегает множество всех целых функций экспоненциального типа. Так как

$$g(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\lambda)\,R(\lambda,\ A)\,d\lambda,$$

то полученное представление для $x(T)$ дает включение $G\subset D$. Рассмотрим еще оператор H, отображающий пространство C_Γ непрерывных (комплексных) функций на контуре Γ в E:

$$Hf=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\,R(\lambda,\ A)\,d\lambda,$$

Очевидно, область значений оператора H включает многообразие D, вместе с тем, в силу полной непрерывности H, она не исчерпывает всего E. Тем более не исчерпывают E многообразия D и G.

Заметим, наконец, что многообразие D инвариантно относительно операторов $\exp At$ при всех действительных t, так как произведение $\exp\lambda t\cdot g(\lambda)$ при $g(\lambda)$ целой экспоненциального типа также является целой функцией экспоненциального типа. Отсюда (и из включения $G\subset D$) легко следует, что для движения системы, определенного формулой (2), $x_0\in D$ влечет $x(t)\in D$ и $x_0\notin D$ влечет $x(t)\notin D$.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
20 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Куржанский, Дифференциальные уравнения, 5, № 9, 1715 (1969). [2] Ф. А. Шолохович, Дифференциальные уравнения, 3, № 3, 479 (1967). [3] Н. Н. Красовский, Теория управления движением, «Наука», 1968. [4] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, «Наука», 1965. [5] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, 1962.