Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 518:512.39

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ,
Ю. Е. АНИКОНОВ, Ф. Н. ФАЗЫЛОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей заметке рассматриваются некоторые нелинейные операторные уравнения в пространствах Банаха, устанавливаются достаточные условия сходимости последовательности приближенных решений к точному. Полученный результат применяется к исследованию обратных задач для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Рассмотрим операторное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A — непрерывный нелинейный оператор, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y.

Нашей целью является рассмотрение уравнений (1), задача решения которых не является корректной в классическом смысле, а является условно корректной (корректной по Тихонову). В соответствии с этим, пусть решение (1) существует и принадлежит некоторому компакту M : $x \in \in M \subset X$.

Пусть, далее, оператор A удовлетворяет условиям

$$\|Ax_1 - Ax_2\| \leqslant c\|x_1 - x_2\|, \; x_i \in X \;\; (i = 1, 2,),$$

где c — постоянная величина.

2. Существует последовательность

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$$

вложенных подпространств, обладающая свойствами:

а) для каждого $x \in M$ существует элемент $x_n \in X_n$ такой, что

$$\|x_n - x\| \leqslant \delta(n), \qquad \delta(n) \to 0, \text{ при } n \to \infty;$$

б) из неравенства

$$\|Ax_n - A\tilde{x}_n\| \leqslant \varepsilon$$

для $x_n \in X_n$, $\tilde{x}_n \in X_n$ следует, что

$$\|x_n - \tilde{x}_n\| \leqslant \omega(\varepsilon, n),$$

где $\omega(\varepsilon, n) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (т. е. решение (1) в X_n устойчиво).

При выполнении указанных условий имеет место следующее утверждение. Пусть x — решение уравнения (1), а x_n — решение уравнения

$$Ax_n = y_n, \tag{2}$$

причем

$$\|Ax - Ax_n\| \leqslant \varepsilon \leqslant 2c\delta(n).$$

Тогда выполнено неравенство

$$\|x - x_n\| \leqslant \delta(n) + \omega(2c\delta(n), n).$$

Действительно, если $\tilde{x}_n \in X_n$ и $\|x_n - x\| \leqslant \delta(n)$, то

$$\|A\tilde{x}_n - Ax_n\| \leqslant \|A\tilde{x}_n - Ax\| + \|Ax_n - Ax\| \leqslant 2c\delta(n).$$

Отсюда и из условия 2 получим

$$\|x-x_n\| \leqslant \|x-\tilde{x}_n\| + \|x_n-\tilde{x}_n\| \leqslant \delta(n) + \omega(2c\delta(n), n).$$

Отсюда, очевидно, следует

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(2c\delta(n), n) = 0$, *то решение уравнения* (2) *стремится к решению уравнения* (1).

3. Рассмотрим применение указанного утверждения предыдущего пункта к решению следующей задачи: найти в полупространстве $y \geqslant 0$ функции $u(x, y, \xi)$ и $\lambda(x, y)$, если выполнены условия

$$F(x, y, \xi, u, u_x, u_y, \lambda) = 0,$$

$$u|_{y=0} = f(x, \xi), \ \lambda(x, 0) = g(x) \tag{3}$$

в области

$$|x| \leqslant a, \quad |\xi| \leqslant a,$$

где F, f, g — заданные функции. Задачи подобного типа возникают, например, при исследовании обратных задач сейсмики, см. ([1]).

Если функция $\lambda(x, y)$ известна, то указанная задача является задачей Коши для уравнения первого порядка. Поскольку в нашей постановке функция $\lambda(x, y)$ не известна, эту задачу можно рассматривать как обратную задачу для дифференциального уравнения, задачу определения уравнения по функционалам от решения. В нашей задаче функционалами решения являются $f(x, \xi)$ и $g(x, 0)$.

Единственность решения этой задачи в классе аналитических функций доказывается при следующих предположениях.

1) функции F, f, g — заданные аналитически функции своих аргументов;

2) $\partial F / \partial u_y|_{y=0} = (x-\xi)A(x, \xi)$,
где $A(x, \xi) \geqslant A_0 > 0$ в исследуемой области, A_0 постоянная;

3) $|\partial F / \partial \lambda|_{y=0} \geqslant A_0$.

Все производные $u_y^{(k)}$ и $\lambda_y^{(k)}$ последовательно можно получить следующим образом. Дифференцируя уравнение (3) по y k раз, полагая $y = 0$, получим

$$F^{(k)} = \overline{F}^{(k)} + F_{u_y} u_y^{(k+1)} + F_\lambda \lambda_y^{(k)} = 0,$$

где $F^{(k)}$ — полная k-я производная функция F по y при $y = 0$ и в выражение $\overline{F}^{(k)}$ входят производные по y функции $u(x, y, \xi)$ не выше k-го порядка.

Отсюда, учитывая условие (4) для нахождения частных производных $\lambda_y^{(k)}$ и $u_y^{(k+1)}$, получаем рекуррентные соотношения

$$\lambda_y^{(k)}|_{y=0} = -\overline{F}^{(k)} / F_\lambda|_{y=0,\ \xi=x}; \tag{5}$$

$$u_y^{(k+1)}|_{y=0} = (F^{(k)} - F_\lambda \lambda_y^{(k)}) / F_{u_y}. \tag{6}$$

Ищем функцию $\lambda(x, y)$ в классе полиномов степени n, коэффициенты которых ограничены постоянной N, и пусть $|D^\alpha f| \leqslant N^{|\alpha|}\alpha!$, где α — мультииндекс и D^α — оператор дифференцирования. Будем далее предполагать, что уравнение (3) можно записать в виде

$$u_y = \Phi(x, y, \xi, u, u_x, \lambda).$$

При сделанных предположениях из теоремы Коши — Ковалевской следует, что все производные $D^\alpha u$ функции $u(x, y, \xi)$ удовлетворяют неравенствам $|D^\alpha u| \leqslant N^{|\alpha|}\alpha!$.

Отсюда, в частности, следует, что для всех производных функции $A(x, \xi)$ справедлива оценка $|D^\alpha A| \leqslant N^{|\alpha|}\alpha!$.

Пусть f, $\tilde{f}$, A и $\tilde{A}$ — начальные данные, удовлетворяющие условиям:

а) $|f-\tilde{f}|<\varepsilon$,

б) $|A-\tilde{A}|<\varepsilon$.

Так как функции f и A принадлежат W_2^α, а эти пространства составляют гильбертову шкалу пространств (см. ([2])), то найдется такая постоянная c, что

$$\|f\|_{W_2^\alpha}\leqslant c\,\|f\|^{(m-\alpha)/m}_{\overset{0}{W_2}}\cdot\|f\|^{\alpha/m}_{\overset{m}{W_2}}. \tag{7}$$

Полагая в (7) $m=2\alpha$ и учитывая условия а) и б), получим

$$|D^\alpha f=D^\alpha\tilde{f}|\leqslant c\varepsilon^{1/2}=\omega(\varepsilon,\alpha),$$

$$|D^\alpha A-D^\alpha\tilde{A}|\leqslant c\varepsilon^{1/2}=\omega(\varepsilon,\alpha). \tag{8}$$

Заметим, что при определении $u_y^{(k)}|_{y=0}$ и $\lambda_y^{(k)}|_{y=0}$ по формулам (5) и (6) применяются только операции дифференцирования по x и ξ функции $f(x,\xi)$ и $A(x,\xi)$, сложение, умножение и деление на положительную функцию $A(x,\xi)$. Отсюда и из неравенств (8) получаем

$$|\lambda_y^{(k)}-\tilde{\lambda}_y^{(k)}|\leqslant\varphi_k(\omega,n).$$

Так как в нашем случае $\lambda(x,y)$ — полином степени n, то для $0\leqslant y\leqslant y_0$ имеет место оценка

$$\sum_{k=1}^{n}y^{(k)}|\lambda_y^{(k)}-\tilde{\lambda}_y^{(k)}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}y_0^k\varphi_k(\omega,n)=\varphi(\omega,n). \tag{9}$$

Обозначим через $T_1(\lambda)$ и $T_2(\lambda)$ операторы, которые ставят функции $\lambda(x,\xi)$ в соответствие функции $f(x,\xi)$ и $A(x,\xi)$,

$$T_1(\lambda)=f(x,\xi),\quad T_2(\lambda)=A(x,\xi),$$

и через $J(\lambda)$ — оператор

$$J(\lambda)=\iint[\{T_1(\lambda)-f\}^2+\{T_2(\lambda)-A\}^2]\,dx\,d\xi.$$

Рассмотрим следующий метод приближенного решения сформулированной обратной задачи. Пусть $\lambda_n(x,y)$ — многочлен степени n. По данным $f(x,\xi)$ и $A(x,\xi)$ определим многочлен $\bar{\lambda}_n(x,y)$, на котором $J(\lambda_n)$ достигает минимума, и рассмотрим $\bar{\lambda}_n(x,y)$ в качестве приближенного решения обратной задачи. Коэффициенты многочлена определим, например, методом наименьших квадратов. Из изложенного следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть M — компакт, обладающий свойствами:*

а) *Для любого элемента $\lambda(x,y)\in M$ существуют λ_n такие, что*

$$\|\lambda-\lambda_n\|\leqslant\delta(n);$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(n)+\varphi(\omega,n)=0.$

Тогда $\|\bar{\lambda}_n-\lambda\|\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. последовательные приближения решений обратной задачи $\bar{\lambda}_n$ сходятся к точному решению $\lambda(x,y)$.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Е. Аниконов, Сборн. Математические проблемы геофизики, в. 1, Новосибирск, 1969. [2] С. Г. Крейн, Ю. И. Петухин, УМН, 21, в 2 (1966).