Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 519.4 : 517 : 513.88

МАТЕМАТИКА

Ю. И. ЛЮБИЧ

О СПЕКТРЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 III 1971)

Пусть G — топологическая абелева группа, Γ — ее группа характеров, вообще говоря, неунитарных, т. е. непрерывных гомоморфизмов $\chi\colon G\to C_0$. Пусть в некотором комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ действует представление $T\colon G\to \operatorname{Aut}\mathfrak{B}$.

Предположим, что группа G сепарабельна.

Определение 1. Существенным спектром представления T называется множество $\sigma_e(T)$ таких характеров $\chi\in\Gamma$, для каждого из которых существует последовательность векторов $\{x_n\}_1^\infty\subset\mathfrak{B}$, удовлетворяющая условиям *:

$$\forall g \quad \lim_{n\to\infty}(T_g x_n-\chi(g)x_n)=0,\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|x_n\|>0. \tag{1}$$

Определение 2. Спектром представления T называется множество

$$\sigma(T)=\sigma_e(T)\cup\overline{\sigma_e(T^*)},$$

где T^* — представление, сопряженное с T, черта означает комплексное сопряжение.

Очевидно, если $\chi\in\sigma_e(T)$, то $\chi(g)\in\sigma_e(T_g)$ для всех $g\in G$, и то же самое верно для спектра в целом.

Спектр любого оператора $S\in\operatorname{Aut}\mathfrak{B}$ совпадает со спектром представления $n\to S^n$ группы $\mathbf{Z}$. Поэтому естественно попытаться развить общую спектральную теорию представлений, ориентируясь на имеющуюся спектральную теорию индивидуального оператора. «Обратная» связь также может быть полезной. Например, спектральная теорема для самосопряженного оператора следует из интегральной формулы Стоуна для однопараметрической группы унитарных операторов. Другим примером может служить техника работ ([2–5]).

В настоящей заметке изучается вопрос о непустоте и замкнутости спектра представления.

Теорема. *Если представление T равномерно непрерывно, то его существенный спектр непуст и замкнут в поточечной топологии.*

Тем самым и спектр в целом обладает указанным свойством.

Для доказательства теоремы введем банахово пространство $m(\mathfrak{B})$ ограниченных последовательностей $X=\{x_n\}_1^\infty\subset\mathfrak{B}$, полагая $\|X\|=\sup\limits_n\|x_n\|$. Через $c_0(\mathfrak{B})$ обозначим подпространство, выделяемое требованием $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Рассмотрим фактор-пространство $\overline{m}(\mathfrak{B})=m(\mathfrak{B})/c_0(\mathfrak{B})$. Образ элемента $X\in m(\mathfrak{B})$ в $\overline{m}(\mathfrak{B})$ обозначим через $\overline{X}$. Легко видеть, что

$$\|\overline{X}\|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|x_n\|. \tag{2}$$

---

* Близкая ситуация упомянута в одной важной статье Домара ([1], стр. 65—66), а частные случаи рассеяны по обширной литературе.

Пусть S — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{B}$. Продолжим его на $m(\mathfrak{B})$, полагая $SX = \{Sx_n\}_1^\infty$. Так как подпространство $c_0(\mathfrak{B})$ инвариантно относительно S, то можно естественно определить фактор-оператор $\overline{S}$ в $\overline{m}(\mathfrak{B})$. Легко видеть, что

$$\|\overline{S}\| = \|S\|. \tag{3}$$

Кроме того, очевидно, продолжение $S \mapsto \overline{S}$ является кольцевым гомоморфизмом. При этом продолжении происходит «алгебраизация» спектра *.

Лемма 1. *Существенный спектр $\sigma_e(S)$ оператора S совпадает с дискретным спектром $\sigma_d(\overline{S})$ (т. е. с множеством собственных значений) оператора $\overline{S}$.*

Действительно, если $\lambda \in \sigma_e(S)$, то существует ограниченная последовательность $X = \{x_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{B}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} (Sx_n - \lambda x_n) = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\| > 0.$$

Но это означает, что $\overline{S}\overline{X} - \lambda\overline{X} = 0$, $\overline{X} \neq 0$, т. е. $\lambda \in \sigma_d(\overline{S})$. Обратное также ясно из сказанного.

Следствие. *Дискретный спектр оператора $\overline{S}$ непуст.*

Рассмотрим теперь конечную систему линейных ограниченных операторов $S_1, \ldots, S_m$ в $\mathfrak{B}$.

Лемма 2. *Если операторы $S_1, \ldots, S_m$ попарно коммутируют, то операторы $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_m$ обладают общим собственным вектором.*

Доказательство проводится индукцией по m (база — предыдущее следствие). Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ — такой набор значений, что подпространство общих собственных векторов $E = \{\overline{X} \mid \overline{S}_i\overline{X} - \lambda_i\overline{X} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m-1)\}$ отлично от нуля (будем называть такой набор когерентным). Так как E инвариантно для $\overline{S}_m$, то оператор $\overline{S}_m | E$ имеет некоторую точку λ_m существенного спектра, т. е. заведомо найдется такая последовательность $\{\overline{X}_k\}_1^\infty \subset E$, что

$$\|\overline{S}_m\overline{X}_k - \lambda_m\overline{X}_k\| < 1/k, \quad \|\overline{X}_k\| = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Но $\overline{X}_k = \{x_{nk}\}_1^\infty$ и в силу (4), (2)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|S_m x_{kn} - \lambda_m x_{kn}\| < 1/k, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_{kn}\| = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Вместе с тем

$$\lim_{n\to\infty} (S_i x_{kn} - \lambda_i x_{kn}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m-1;\ k = 1, 2, 3, \ldots),$$

поскольку $\overline{X}_k \in E$. Применяя диагональный процесс, можно выделить из матрицы $\{x_{kn}\}_{k,n=1}^\infty$ такую ограниченную последовательность элементов $\{x_n\}_1^\infty$, что

$$\lim_{n\to\infty} (S_i x_n - \lambda_i x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\| > 0,$$

т. е. $\overline{S}_i\overline{X} - \lambda_i\overline{X} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$, $\overline{X} \neq 0$.

Рассмотрим, наконец, счетную последовательность $\{S_i\}_1^\infty$ линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{B}$.

Лемма 3. *Если операторы S_i $(i = 1, 2, \ldots)$ попарно коммутируют, то операторы $\overline{S}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ обладают общим собственным вектором.*

Действительно, из доказательства леммы 2 следует, что когерентный набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ можно продолжить до когерентного набора $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m$. Таким образом, существует последовательность $\{\lambda_i\}_1^\infty$, каждый отрезок которой когерентен, т. е. для каждого $m = 1, 2 \ldots$ существует $\overline{X}_m \neq 0$ такой, что $\overline{S}_i\overline{X}_m - \lambda_i\overline{X}_m = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Дешифруя эти соотношения и применяя диагональный процесс, можно получить такую ограниченную

* Эта идея, как сообщил автору Р. С. Исмагилов, уже использовалась в спектральном анализе (см. [6]).

последовательность X, что

$$S_i\overline{X} - \lambda_i\overline{X} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad \overline{X} \neq 0.$$

Переходя к доказательству теоремы, заметим, что $\overline{T}$ есть представление группы G в $\overline{m}(\mathfrak{B})$, равномерно непрерывное в силу (3). Выберем в G плотную счетную последовательность $\{g_i\}_1^\infty$. По лемме 3 существует общий собственный вектор $\overline{X}$ операторов $\overline{T}_{g_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Этот факт распространяется по непрерывности на все семейство * $\overline{T}_g$, т. е.

$$\forall g \quad \overline{T}_g\overline{X} - \chi(g)\overline{X} = 0, \quad \overline{X} \neq 0. \tag{5}$$

Функция $\chi(g)$ с необходимостью является характером. Дешифруя (5), получаем (1), т. е. $\chi \in \sigma_e(T)$. Таким образом, существенный спектр $\sigma_e(T)$ непуст.

З а м е ч а н и е. Если на каком-то подмножестве $H \subset G$ задана комплекснозначная функция $\xi(h)$, для которой существует последовательность векторов $\{x_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{B}$, удовлетворяющая условиям

$$\forall h \quad \lim_{n\to\infty} (T_h x_n - \xi(h) x_n) = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\| > 0,$$

то ξ продолжается до некоторого характера $\chi \in \sigma_e(T)$.

В частности, это означает, что для любого элемента $g \in G$ и любого $\lambda \in \sigma_e(T_g)$ можно построить характер $\chi \in \sigma_e(T)$ такой, что $\chi(g) = \lambda$. В этом смысле характеров, принадлежащих спектру представления, оказывается достаточно много.

Докажем замкнутость существенного спектра в поточечной топологии. Пусть $\chi \in \Gamma$ — его предельная точка. Тогда для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существует такой характер $\chi_m \in \sigma_e(T)$, что

$$|\chi_m(g_i) - \chi(g_i)| < 1 / m \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Рассмотрим соответствующие собственные векторы

$$\forall g \quad \overline{T}_g\overline{X}_m - \chi_m(g)\overline{X}_m = 0, \quad \|\overline{X}_m\| = 1.$$

Очевидно,

$$\|\overline{T}_{g_i}\overline{X}_m - \chi(g)\overline{X}_m\| < 1/m \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Снова применяя диагональный процесс, получаем такой $\overline{X} \neq 0$, что $\overline{T}_{g_i}\overline{X} - \chi(g_i)\overline{X} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. По непрерывности $\overline{T}_g\overline{X} - \chi(g)\overline{X} = 0$ для всех g, т. е. $\chi \in \sigma_e(T)$.

Для локально компактных групп более естественна компактно-открытая топология в Γ. Так как она сильнее топологии поточечной сходимости, то замкнутость сохраняется.

Требование равномерной непрерывности представления нельзя ослабить до сильной непрерывности, как показывает

П р и м е р. Рассмотрим в $L^2(0,1)$ подмножество G функций $g(t)$, принимающих значения ± 1. G есть абелева группа относительно обычного умножения. В топологии, унаследованной из L^2, группа G линейно связна: любой элемент g соединяется с единицей путем

$$g_s(t) = \begin{cases} g(t), & t < s, \\ 1, & t \geqslant s, \end{cases}$$

$$(0 \leqslant s \leqslant 1).$$

Группа характеров Γ единичная, так как $g^2 = 1$ $(g \in G)$.

---

* Здесь используется лишь сильная непрерывность представления $\overline{T}$, но это свойство не обеспечивается сильной непрерывностью исходного представления T.

Рассмотрим представление T группы G в пространстве $L^2(0, 1)$ операторами умножения $(T_g f)(t) = g(t)f(t)$. Оно сильно, но не равномерно непрерывно. Спектр этого представления пуст, так как в противном случае $\sigma(T) = \{1\}$, что невозможно, ибо функции (-1) отвечает оператор (-1). Указанная группа G не является локально компактной. Это следует хотя бы из тривиальности ее группы характеров. Однако локальная компактность не спасает положения. Г. Коберу принадлежит пример (см. [7], стр. 674—680) сильно непрерывной однопараметрической группы $U_t (-\infty < t < \infty)$ ограниченных операторов в $\mathscr{L}^2(0, 1)$, для которой спектр инфинитезимального оператора пуст. Вместе с тем нетрудно доказать, что спектр инфинитезимального оператора всегда совпадает со спектром представления.

Для представлений несепарабельных групп вопрос об адекватном определении спектра требует дальнейшего изучения.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
20 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Y. Domar, Acta Math., 96 (1956). [2] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Матем. сборн., 56 (98), № 4, 433 (1962). [3] Ю. И. Любич, ДАН, 132, № 3, 518 (1960). [4] Ю. И. Любич, УМН, 18, № 1, 165 (1963). [5] Ю. И. Любич, УМН, 20, № 5, 221 (1965). [6] S. Berberian, Proc. Am. Math. Soc., 13, № 1, 111 (1962). [7] Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.