Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 513.73,593:88,517:515

МАТЕМАТИКА

В. Д. МИЛЬМАН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 30 III 1971)

Настоящая заметка развивает результаты работы (1).

1. Вводимое в п.2 работы понятие спектра (*) ранее рассматривалось нами в (2) для случая банаховой сферы $S(B) = \{x \in B\colon \|x\| = 1\}$. Изложение ведется для случая пространства гильберта H над вещественным полем, скалярное произведение в котором обозначим $\langle x, y\rangle$. В п. 5 указаны некоторые приложения спектра $\mathfrak{S}^*$ к геометрии бесконечномерных пространств. В п. 6 приведены приложения спектра $\mathfrak{S}^*$ к вычислению бесконечнократных интегралов. Обратим внимание также на использование понятия спектра (*) в операторных вопросах (2, 7).

2. Спектр $\mathfrak{S}^*(f)$. Пусть H — гильбертово пространство $(\dim H = \infty)$ и $\mathscr{E}_n = \{E_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ — семейство всех n-мерных подпространств $(n = 1, 2, \ldots)$. Определим следующие серии многообразий $(V_\infty;\ V_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$.

1к) Многообразия Штифеля: $V_n(\alpha) = W_{n,k}(\alpha)$ — многообразие всех упорядоченных k-реперов в $E_\alpha \in \mathscr{E}_n$, $V_\infty = W_{\infty,k}$ — многообразие всех упорядоченных k-реперов в H. Ясно, что $W_{\infty,1} = S(H) = S$.

2к) Многообразие Грассмана: $V_n(\alpha) = G_{n,k}(\alpha)$ (k-мерные подпространства в $E_\alpha \in \mathscr{E}_n$) и $V_\infty = G_{\infty,k}$ (k-мерные подпространства в H);

3) Ортогональные группы: $V_\infty = O_\infty$ (ортогональная группа в H) и $V_n(\alpha) = O_n(\alpha) = W_{n,n}(\alpha)$ (n-реперы в $E_\alpha \in \mathscr{E}_n$);

4) Прямые произведения: $V_n(\alpha) = W_{n,k_1}(\alpha_1) \times \ldots \times W_{n,k_i}(\alpha_i)$, $V_\infty = W_{\infty,k_1} \times \ldots \times W_{\infty,k_i}$ или $\{V_n(\alpha) = G_{n,k_1}(\alpha_1) \times \ldots \times G_{n,k_i}(\alpha_i)\}_{n\to\infty,\, n=\infty}$.

В каждом из указанных многообразий введем естественную, наведенную расстоянием в H, метрику: так, если E_{α_1} и E_{α_2} — k-мерные подпространства H, то $\rho(E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2})$ есть хаусдорфово расстояние между множествами $S(E_{\alpha_i}) = \{x \in E_{\alpha_i} : \|x\| = 1\}$, а в том случае, когда $\xi_{(1)} = \{e_{j,1}\}_{j=1}^{k}$, $\xi_{(2)} = \{e_{j,2}\}_{j=1}^{k}$ два k-репера, то $\rho(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}) = \max\{\|e_{j,1} - e_{j,2}\|\colon j = 1, \ldots, k\}$.

Теорема 1. *Пусть $\{V_\infty;\ V_n(\alpha)\}$ обозначает одну из введенных серий однородных пространств (т. е. 1к, 2к, 3 или 4) и $f(\xi)$, $\xi \in V_\infty$, — произвольная вещественная * равномерно непрерывная на V_∞ функция.*

Тогда существует число a такое, что при любом $\varepsilon > 0$ множество

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) = \{\xi \in V_\infty\colon |f(\xi) - a| < \varepsilon\}$$

содержит при любом целом n некоторое подмногообразие $V_n(\alpha_0)$ (т. е. при любом n существует $E_{\alpha_0} \in \mathscr{E}_n$ такое, что соответствующее подпространству E_{α_0} многообразие $V_n(\alpha_0) \subset \mathfrak{A}(\varepsilon)$).

Число a, обладающее указанным в теореме свойством, называется точкой спектра (*) или конечномерного спектра функции $f(\xi)$. Все множество таких чисел обозначается $\mathfrak{S}^*(f)$.

Имеет место также утверждение о своеобразной полноте спектра.

Теорема 2. *Обозначим $\mathfrak{S}_\varepsilon^*(f)$ — ε-оболочку спектра $\mathfrak{S}^*(f)$ функции $f(\xi)$ $(\xi \in V_\infty)$ и $f^{-1}[\mathfrak{S}_\varepsilon^*(f)] = \{\xi \in V_\infty\colon |f(\xi) - a| < \varepsilon$ при некотором $a \in \mathfrak{S}^*(f)\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое n такое, что множество $f^{-1}[\mathfrak{S}_\varepsilon^*(f)]$ пересекается с подмногообразием $V_n(\alpha)$ при любом $\alpha \in \Lambda_n$.*

---

* Вместо вещественных функций можно рассматривать отображения с относительно компактным образом.

В случае, когда $V_\infty = S(= W_{\infty, 1})$ теоремы 1 и 2 доказаны нами в ([2]) (см. также ([3])), где разобран случай произвольных пространств Банаха. Доказательство обеих теорем опирается на изложенный в ([1]) конечномерный аналог теоремы 1, в котором и заложена вся специфика многообразия.

3. Функции нескольких переменных. Из теоремы о непустоте спектра (теоремы 1) в случае $V_\infty = S \times S$ следует, что для произвольной равномерно непрерывной функции (р.н.ф.) $f(x, y)$ $(x, y \in S)$ при любом $\varepsilon > 0$ и n существуют n-мерные подпространства E_{α_1} и E_{α_2} такие, что колебание функции $\operatorname{osc}\{f(x, y) : x \in S(E_{\alpha_1}),\ y \in S(E_{\alpha_2})\} < \varepsilon$. Естественно, возникает вопрос о том, можно ли считать $E_{\alpha_1} = E_{\alpha_2}$. Простой пример функции $\theta(x, y) = \langle x, y\rangle$ (скалярное произведение, т. е. косинус угла между x и y) показывает, что это, вообще говоря, не так: для произвольного 2-мерного подпространства E_α $\operatorname{osc}\{\theta(x, y): x, y \in S(E_\alpha)\} = 2$. Однако, используя теорему 1 для многообразия $W_{\infty, 2}$, можно показать, что указанный пример в определенном смысле единственный.

Теорема 3. *Пусть $f(x, y)$ — р.н.ф. при $x, y \in S(H)$. Существует функция $\varphi(\theta)$, $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$, такая, что при любом $\varepsilon > 0$ и n существует $E_\alpha \in \mathscr{E}_n$ и*

$$|f(x, y) - \varphi(\theta)| < \varepsilon$$

при $x, y \in S(E_\alpha)$ и $\theta = \langle x, y\rangle$.

Отметим конечномерный аналог теоремы 3.

Теорема 3а. *Для любой непрерывной функции $f(x, y)$, где $x, y \in S_n \times S_n$ (сфера в n-мерном пространстве), существует функция $\varphi(\theta)$, $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$, такая, что на некотором подпространстве E_α*

$$\dim E_\alpha \geqslant a_n \left(\frac{\ln \cos \varepsilon/2}{2 \ln \sin \varepsilon/2}\right)^{1/2\varepsilon} n \quad (a_n \to 1 \text{ при } n \to \infty)$$

при $x, y \in S(E_\alpha)$ $|f(x, y) - \varphi(\theta)| < \omega_f(\varepsilon)$, где $\theta = \langle x, y\rangle$ и $\omega_f(\varepsilon)$ — модуль непрерывности f.

Аналогичный теореме 3 факт имеет место и для функции k переменных. Приведем формулировку для трех переменных, поскольку дальнейшие обобщения очевидны.

Теорема 4. *Пусть $f(x, y, z)$ — р.н.ф. при $x, y, z \in S(H)$. Существует функция $\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $|\theta_i| \leqslant 1$, такая, что при любом $\varepsilon > 0$ и n найдется подпространство $E_\alpha \in \mathscr{E}_n$, на котором $|f(x, y, z) - \varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)| < \varepsilon$ при $x, y, z \in S(E_\alpha)$ и $\theta_1 = \langle x, y\rangle$, $\theta_2 = \langle x, z\rangle$, $\theta_3 = \langle y, z\rangle$.*

4. Функции, зависящие от параметра.

Теорема 5. *Пусть B — бесконечномерное пространство Банаха, T — метрический компакт и $C(T)$ — пространство всех непрерывных на T функций. Для произвольной равномерно непрерывной на $T \times S(B)$ функции $f(t; x)$ (которая задает отображение f: $S(B) \to C(T)$ по формуле $x \to f(t, x)$) существует $\varphi(t) \in C(T)$ такая, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\mathfrak{A}_\varepsilon = \{x \in S(B) : \max_{t \in T} |f(t, x) - \varphi(t)| < \varepsilon\}$ содержит сферы некоторых подпространств сколь угодно высокой (конечной) размерности. (Таким образом, «совместный» спектр $\mathfrak{S}^*(f_t)$ семейства отображений f_t, зависящих от параметра $t \in T$, не пуст.) При этом, если при некотором $t_0 \in T$ существует $a_0 \in \mathfrak{S}^*(f(t_0; x))$, то найдется такая непрерывная функция $\varphi_0(t) \in \mathfrak{S}^*(f_t)$,* что $\varphi_0(t_0) = a_0$.

Результат, аналогичный теореме 5, имеет место также для всех указанных в п. 2 серий многообразий.

5. Приложение понятия спектра функций к геометрическим вопросам. Изучение многих закономерностей строения выпуклых тел сводится к обнаружению постоянства (или ε-постоянства) специально подобранной функции. Например, если функция $f(x, y) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ постоянная (а, значит, равна 4) на сфере некото-

рого подпространства E, то единичный шар $S(E)$ есть эллипсоид (т. е. норма эвклидова). На подобных соображениях основано простое доказательство теоремы А. Дворецкого ([4]) о «почти» шаровых сечениях выпуклых тел (см. ([3])).

Следующее свойство пространств Банаха получаем, вычисляя спектр функции $\theta(x, y) = \inf\{\|x + \lambda y\|, \|\mu x + y\|: -\infty < \lambda, \mu < \infty\}$, где $\|x\| = \|y\| = 1$. Число $\theta(x, y)$ — это минимальный угол (см. ([5])) между одномерными подпространствами, натянутыми элементами x и y.

Теорема 6. *Пусть E_0 — произвольное конечномерное подпространство банахова пространства B ($\dim B = \infty$). Для любого n и $\varepsilon > 0$ существует подпространство $E_1(\dim E_1 = n)$, которое ε-ортогонально E_0*, т. е. $\|x+y\| \geqslant (1 - \varepsilon)\max(\|x\|, \|y\|)$ *для любых $x \in E_0$ и $y \in E_1$.*

Еще одно приложение теоремы о спектре (*) к геометрическим свойствам банаховой сферы можно найти в ([6]) (следствие 1).

6. Приложение к вычислению бесконечнократных интегралов. В известных нам приложениях понятия спектра (*) особую роль играют функции с единственной точкой спектра (*). Такие функции образуют кольцо (см. ([2])). Все использованные нами функции, имеющие геометрическое истолкование, обладали единственной точкой спектра (*). Результаты этого пункта естественным образом выделяют класс функций с единственной точкой спектра (*).

Ниже предполагается, что $f_1(x)$ и $f_2(x, y)$ — р.н.ф. при $x, y \in H$ ($\dim H = \infty$), которые финитны на бесконечности (т. е. при некотором R и $\|x\| > R$, $f_1(x) = 0$, а $f_2(x, y) = 0$ при $\|x\|^2 + \|y\|^2 > R$). Обозначим σ_n лебегову меру ($(n-1)$-мерную) единичной сферы n-мерного пространства. Пусть $\{e_i\}_1^\infty$ — некоторый ортонормированный базис в H; элемент $x = \sum x_i e_i$ будем обозначать также $x = (x_i)$. Для сокращения записи введем следующее обозначение:

$$J_{2n}(f/\varphi_n;\ x, y) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2n} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots; y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, \ldots)}{\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots; y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, \ldots)}\, dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_n$$

т. е. функция двух переменных $f(x, y) / \varphi_n(x, y)$ интегрируется по n первым координатам. В случае, когда интегрирование ведется по некоторому подмножеству $M \subset H \times H$, т. е. J_{2n} — это интеграл по множеству $(E_n \times E_n) \cap M$, мы пишем $J_{2n}(f/\varphi_n;\ x, y, M)$. Если $f(x)$ и $\varphi_n(x)$ — функции одного переменного x, то аналогичным образом понимается обозначение $J_n(f/\varphi_n;\ x)$ (n-мерный интеграл по первым n координатам вектора $x = (x_i)$) и $J_n(f/\varphi_n;\ x;\ M)$, где $M \subset H$.

Теорема 7. a) *Если при всех $r = \|x\|$ существует единственная точка спектра (*) у функции $f(x)$, рассматриваемой на сфере $r \cdot S(H)$ (радиуса r), и $\mathfrak{S}^*(f(x): \|x\| = r) = a_1(r)$, то при $\varphi_{1,n}(x) = \sigma_n \|x\|^{n-1}$ существует предел*

$$J_{1,\infty}(f) = \lim_{n\to\infty} J_n(f/\varphi_{1,n};\ x) = \int_0^\infty a_1(r)\, dr.$$

b) *Если для любого ортогонального преобразования $A \in O_\infty$ и любого сферического слоя M (таким образом, $AM = M$ при всех $A \in O_\infty$) существует $\lim_{n\to\infty} J_n(f/\varphi_{1,n};\ Ax;\ M)$, то этот предел не зависит от A и при всех $r \in (0, \infty)$ на сфере $r \cdot S(H)$ существует единственная точка спектра (*) у функции $f(x)$.*

Далее рассматриваются функции двух векторных переменных. В формулировке результата присутствует спектр (*) функции $f(x, y)$, рассматриваемый на том или ином бесконечномерном многообразии V_∞. Выбор многообразия зависит от требуемых свойств инвариантности интеграла (обычно это орбиты класса преобразований, относительно которых инвариантен интеграл), а под $\mathfrak{S}^*(f)$ понимается спектр (*) для рассматриваемого многообразия в указанном в п. 2 смысле.

Теорема 8. a) *Обозначим* $\varphi_{2,n}(x, y) = \varphi_{1,n}(x) \cdot \varphi_{1,n}(y) = \sigma_n^2 \|x\|^{n-1} \cdot \|y\|^{n-1}$. *Для того чтобы предел* $\lim\limits_{n\to\infty} J_{2n}(f / \varphi_{2,n}; A_1 x, A_2 y; M) = J_{2,\infty}(f, M)$ *существовал при любых ортогональных преобразованиях* $A_i \in O_\infty$ *и любом замкнутом множестве* $M \subset H \times H$, *инвариантном относительно группы всех преобразований из* $O_\infty \times O_\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы при всех* $r_1 = \|x\|$ *и* $r_2 = \|y\|$ *функция* $f(x, y)$, *рассматриваемая на многообразии* $V_\infty = (r_1 S) \times (r_2 S)$, *имела единственную точку спектра* (*) $\mathfrak{S}^*(f(x, y)\colon \|x\| = r_1, \|y\| = r_2) = a_2(r_1, r_2)$. *При выполнении указанного условия предел не зависит от* $A_i \in O_\infty$ *и* (*при* $M = H \times H$) $J_{2,\infty}(f) =$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty a_2(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2.$$

b) *Обозначим* $\varphi_{3,n}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{2n} (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{n-1/2}$. *Для существования* $\lim\limits_{n\to\infty} J_{2n}(f / \varphi_{3,n}; Ax, Ay; M) = J_{3,\infty}(f; M)$ *при любом* $A \in O_\infty$ *и любом замкнутом множестве* $M \subset H \times H$ *таком, что* $(A', A')M = M$ *при всех* $A' \in O_\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы при каждом* $r = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$ *функция* $f(x, y)$, *рассматриваемая на многообразии Штифеля* $W_{\infty,2} = \{x, y\colon \|x\| = \|y\| = r / \sqrt{2},\ \langle x, y\rangle = 0\}$, *имела единственную точку спектра* (*): $\mathfrak{S}^*(f(x, y)\colon \|x\| = \|y\| = r / \sqrt{2}, \langle x, y\rangle = 0) = a_3(r)$. *При выполнении указанного условия предел не зависит от* $A \in O_\infty$ *и* (*при* $M = H \times H$) $J_{3,\infty} = \int_0^\infty a_3(r)\, dr$.

c) *Обозначим* $\varphi_{4,n}(x, y) = \varphi_{3,n}(x, y) \cdot (1 - \theta^2)^{n-1}$, *где* $\theta = \langle x / \|x\|, y / \|y\|\rangle$. *Для существования* $\lim\limits_{n\to\infty} J_{2n}(f / \varphi_{4,n}; Ax, Ay; M) = J_{4,\infty}(f; M)$ *при любом* $A \in O_\infty$ *и любом замкнутом множестве* $M \subset H \times H$ *таком, что* $(A', A')M = M$ *при всех* $A' \in O_\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы при каждом* $r = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$ *и* θ, $|\theta| \leqslant 1$, *функция* $f(x, y)$, *рассматриваемая на (обобщенном) многообразии Штифеля* $W_{\infty,2}(r, \theta) = \{x, y\colon \|x\| = \|y\| = r / \sqrt{2},\ \langle x / \|x\|, y / \|y\|\rangle = \theta\}$, *имела единственную точку спектра* (*): $\mathfrak{S}^*\{f(x, y) \in W_{\infty,2}(r, \theta)\} = a_4(r, \theta)$. *При выполнении указанного условия предел не зависит от* $A \in O_\infty$ *и* (*при* $M = H \times H$) $J_{4,\infty}(f) =$

$$= \int_0^\infty df \int_{-1}^1 a_4(r, \theta)\, d\theta.$$

В заключение заметим, что существует простой критерий существования единственной точки спектра (*) у функции $f(\xi)$ ($\xi \in V_\infty$), который получается переформулировкой теоремы 2. Так, например, *функция* $f(x)$ ($x \in S$) *имеет единственную точку спектра* (*) $\mathfrak{S}^*(f) = a$ *тогда и только тогда, когда при любом* $\varepsilon > 0$ *найдется* n *такое, что* $\inf\{|f(x) - a|\colon x \in S(E_\alpha)\} < \varepsilon$ *при любом подпространстве* $E_\alpha \in \mathcal{E}_n$.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Поступило
26 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Мильман, ДАН, 5, № 4 (1971). [2] В. Д. Мильман, Функц. анализ, 3, 2, 67 (1969). [3] В. Д. Мильман, Функц. анализ, 199, № 6 (1971). [4] A. Dvoretzky, Proc. Intern. Symp. Linear Spaces, Jerusalem, 1961, 123—160 (Сборн. пер. Математика, 8, 1, 73 (1964)). [5] М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман, Тр. Инст. матем. АН УССР, № 11, 97 (1948). [6] В. Д. Мильман, ДАН, 177, № 3 (1967). [7] В. Д. Мильман, Теория функций, функц. анализ и их приложения, в. 10, 15 (1970).