Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 517.9 : 530.145.6

МАТЕМАТИКА

Б. С. ПАВЛОВ

О ПОЛНОТЕ НАБОРА РЕЗОНАНСНЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 II 1970)

Подход Лакса и Филипса к теории рассеяния (см. ([1])) позволяет рассматривать полюса аналитического продолжения резольвенты самосопряженного оператора на так называемый нефизический лист как собственные значения некоторого несамосопряженного оператора, чья характеристическая функция совпадает с матрицей рассеяния исходного оператора (см. также ([2], [3])). Мы займемся исследованием полноты набора резонансных состояний (р.с.), т. е. собственных функций упомянутого несамосопряженного оператора. Всюду в дальнейшем роль исходного оператора играет самосопряженный дифференциальный оператор типа Шредингера с финитным потенциалом. Условия полноты р.с. явно записываются в терминах свойств потенциала оператора Шредингера. Мы исследуем также полноту системы решений уравнения Шредингера с условием излучения на бесконечности и формулируем теорему разложения по р.с. При этом повсюду оказывается существенной «серийная» структура набора р.с., отмеченная в ([4]).

1°. Пусть E — эвклидово пространство, $n = \dim E < \infty$, $Q(x) \in E \times E$ — непрерывная слева вместе с производными до порядка l матрица-функция, $x \in (-a, \infty)$, $Q(x) = 0$ при $x > 0$, $Q(x) \geqslant 0$ при $x \in (-a, 0)$, $0 < a < \infty$. Следуя Лаксу и Филлипсу, рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} = -Lu,$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{1}$$

где L — самосопряженный оператор типа Шредингера в $L_2(-a, \infty; E)$, порожденный дифференциальным выражением

$$lu = -d^2u / dx^2 + Q(x)u \tag{2}$$

и нулевым граничным условием $u(-a) = 0$. Разрешающие операторы $V(t)$ задачи (1) образуют унитарную группу в гильбертовом пространстве данных $\mathscr{H}$ с энергетической метрикой. Группа $\{V(t)\}$ обладает уходящим и приходящим подпространствами, которые взаимно ортогональны и в сумме дают подпространство $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$ данных, сосредоточенных на промежутке $(0, \infty)$. Ортогональное дополнение $\mathscr{H} \ominus \mathscr{H}_0 = \mathscr{K}$ состоит из данных, имеющих конечную энергию и постоянных вне промежутка $(-a, 0)$, а именно

$$u_0(x) = u_0(0),\ x > 0; \quad u_1(x) = 0,\ x > 0.$$

Обозначим через $\mathscr{P}$ ортопроектор на $\mathscr{K}$ в $\mathscr{H}$ и образуем полугруппы (см. ([1]))

$$\mathscr{Z}_{\pm}(t) = \mathscr{P}V(t)\mathscr{P}, \quad t \gtrless 0.$$

Как следует из ([3]), характеристическая функция генератора полугруппы $\mathscr{Z}_+$ совпадает с матрицей рассеяния * $\mathscr{S}(k)$ оператора L. В ([4])

* Мы имеем в виду матрицу рассеяния, определенную в ([4]).

явно выписаны собственные функции генераторов полугрупп $\mathscr{Z}_+$ и $\mathscr{Z}_-$ в исходном представлении. Здесь нам удобнее пользоваться спектральным представлением (см. ([1])) группы $\{V(t)\}$. В этом представлении подпространству $\mathscr{K}$ отвечает подпространство *

$$K = H^2(E) \ominus \mathscr{S}H^2(E),$$

полугруппы $\mathscr{Z}_\pm$ приобретают форму

$$Z_\pm(t) = Pe^{ikt}P,$$

где P — ортопроектор на K, и собственные функции ψ_m, φ_m генераторов полугрупп $Z_\pm$ записываются в виде

$$\psi_m(k) = \sqrt{2\operatorname{Im} k_m}\,(k - k_m)^{-1}\mathscr{S}(k)\,\pi_m, \tag{3}$$

$$\varphi_m(k) = \sqrt{2\operatorname{Im} k_m}\,(k - \bar{k}_m)^{-1}\Delta_m, \tag{4}$$

где $\pi_m \in \operatorname{Ker}\mathscr{S}(k_m)$, $\Delta_m \in \operatorname{Ker}\mathscr{S}^*(k_m)$.

Ниже корня $\mathscr{S}(k)$ предполагаются простыми **.

2°. Полнота в K систем вида (3) и (4) с общей точки зрения исследовалась в ([2]). Она эквивалентна отсутствию в характеристической функции $\mathscr{S}(k)$ генератора полугруппы Z_+ сингулярного сомножителя. Ниже мы сформулируем условия полноты и опишем дефектное подпространство системы $\{\psi_m\}$ в терминах свойств потенциала $Q(x)$.

Пусть $\{p(x)\}$ — непрерывное слева семейство (максимальных) ортопроекторов в E такое, что

$$Q(x')\,p(x) = 0, \quad x' > x.$$

Пусть, далее, $-a_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ — точки скачков этого семейства, $p_j = p(-a_j + 0) - p(-a_j)$ и при некотором натуральном l, $l > 0$ выполнены следующие условия:

1. Функция $p_jQ(x)p_{j'}$, $j' \neq j$, непрерывно дифференцируема, l, $l \geqslant 0$, раз при $x \leqslant 0$, а $p_jQ(x)p_j$ непрерывно дифференцируема l раз на промежутке $-a \leqslant x \leqslant -a_j$.

2. При каждом j существует набор попарно ортогональных ортопроекторов p_{js}, $s = n_j, n_j + 1, \ldots, m_j$, $m_j \leqslant l$, такой, что

$$\sum_{t=0}^{m_j} p_{jt} = p_j, \quad Q^{(s)}(-a_j)\,p_{jt} = 0, \quad t > s.$$

и оператор $p_{js}Q^{(s)}(-a_j)p_{js}$ невырожден в $p_{js}E$, $n_j \leqslant s \leqslant m_j$.

При условиях 1, 2 в заметке 4 изучалась серийная структура системы собственных функций (3), (4). В частности, там отмечено, что все достаточно далекие нули матрицы рассеяния $\mathscr{S}(k)$ просты, коль скоро собственные подпространства $p_{jst}E$ операторов $p_{js}Q^{(s)}(-a_j)p_{js}$ одномерны. При этом грубая серийная структура системы собственных функций определяется набором $\{a_j, p_j\}$, а более тонкая — набором собственных чисел q_{jst} и ортопроекторов p_{jst} на собственные подпространства операторов $p_{js}Q^{(s)}(-a_j)p_{js}$.

Теорема 1. *Матрица $\mathscr{S}(k)$ при условиях 1, 2 допускает факторизации*

$$\mathscr{S}(k) = \exp\{2ik\Sigma a_jp_j\}\,\theta(k) = \bar{\theta}(k)\exp\{2ik\Sigma a_jp_j\}, \tag{5}$$

где $\theta(k)$ и $\bar{\theta}(k)$ — операторные произведения Бляшке.

Сравнивая это утверждение с результатами заметки (4), отметим, что вид сингулярного сомножителя $\exp\{2ik\Sigma a_jp_j\}$ зависит лишь от грубого разделения собственных функций (3), (4) на серии. Можно также пока-

---

* $H^2(E)$ — класс Харди E-значных функций в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$; $\mathscr{S}$ — оператор умножения на функцию $\mathscr{S}(k)$, которая в нашем случае является внутренней (см. ([1])).

** Отметим, что при выполнении условий 1, 2 лишь конечное число $\mathscr{S}(k)$ могут быть кратными ([4]).

зать, что матрица $\mathscr{S}(k)$ асимптотически диагональна в базисе $\{p_{jst}\} \equiv \{p_\sigma\}$, т. е. при $\sigma \neq \sigma'$

$$p_{\sigma'}\mathscr{S}(k)p_\sigma \to 0, \quad |k| \to \infty, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0,$$

по операторной норме в E.

Из теоремы 1 и общих утверждений книги ([2]) следует

Теорема 2. *Для того чтобы системы* (3) *и* (4) *были полны в* K, *необходимо и достаточно, чтобы* $a_j = 0$, $j \geqslant 1$.

Остсюда видно, что полнота системы р.с. имеет место лишь в исключительных случаях. Если среди чисел a_j есть отличные от нуля, мы можем явно описать ортогональные дополнения (дефекты) систем (3), (4). Сформулируем соответствующее утверждение в терминах первоначального представления.

Теорема 3. *Дефект* N *системы собственных функций генератора* $\mathscr{B}_+$ *полугруппы* $\mathscr{Z}_+$ *есть ортогональная сумма двух подпространств*, $N = N_1 \oplus \oplus N_2$, *где* N_1 — *множество всех приходящих данных и из* $\mathscr{K}$:

$$\{u = (u_0, u_1), \quad du_0(x) / dx = u_1(x)\},$$

удовлетворяющих условию $p(x)f_0(x) = f_0(x)$, *а* $N_2 = \sum_{j\geqslant 1} \oplus V(a_j)\, p_j N_1$. *Здесь* $\{p_j\}$ — *постоянные проекторы, те же, что и в формуле* (5).

Отметим, что сингулярный сомножитель матрицы рассеяния является характеристической функцией части оператора $\mathscr{B}_+^*$ в его инвариантном подпространстве N. Оператор $\mathscr{B}_+^*|N$ не имеет спектра, т. е. его обратный оператор является вольтерровским.

3°. Обратимся к исследованию полноты системы $\{f_m\}$ решений уравнения

$$lf_m = k_m^2 f_m, \tag{6}$$

удовлетворяющих условию излучения: $f_m(x)e^{ik_m x} = \pi_m$, $x > 0$. Здесь k_m — корень матрицы рассеяния, $\pi_m \in \operatorname{Ker} \mathscr{S}(k_m)$. Как показано в ([4]), через f_m явно выражается главная часть ядра резольвенты оператора L в полюсе $\bar{k}_m$ на нефизическом листе. Из формул для собственных функций ψ_m, φ_m генераторов полугрупп $\mathscr{Z}_+$, $\mathscr{Z}_-$, приведенных в ([4]), следует, что полнота системы $\{\psi_m\}$ (или $\{\varphi_m\}$) в $\mathscr{K}$ эквивалентна двукратной полноте системы $\{f_m\}$. Обычная же полнота системы $\{f_m\}$ в $L_2(-a, 0; E)$ эквивалентна условию

$$\overline{\mathscr{L}\{\psi\} + \mathscr{L}\{\varphi\}} = \mathscr{K},$$

где через $\mathscr{L}\{\psi\}$ и $\mathscr{L}\{\varphi\}$ обозначены линейные оболочки систем $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m\}$. Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. *Для того чтобы система* $\{f_m\}$ *была полна в* $L_2(-a, 0; E)$, *достаточно* *, *чтобы было выполнено* $a_j \leqslant a / 2$, $j \geqslant 1$. *Для того чтобы система* $\{f_m\}$ *была двукратно полна, необходимо и достаточно, чтобы* $a_j = 0$, $j \geqslant 1$.

Для случая $\dim E = 1$ первая часть сформулированного утверждения содержится в работе ([5]), вторая — в заметке ([6]).

4°. В заключение сформулируем теорему разложения по собственным функциям оператора $\mathscr{B}_+$. Будем говорить, что элемент $g \in \mathscr{K}$, $g = (g_0, g_1)$ подчинен потенциалу, если функции $g_0(x)$, $g_1(x)$ непрерывны и $l+3$ раза непрерывно дифференцируемы на $(-a, 0)$ и для g_α, $\alpha = 0, 1$, выполнено

$$p_j g_\alpha(x) = 0, \quad x > -a_j,$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{jst} g_\alpha(x)|_{-a_j} = 0, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \left[2 + (s+3)\frac{a - a_j/2}{a - a_j}\right].$$

---

* А в случае диагональной матрицы $Q(x)$ и необходимо.

Теорема 5. *Если $g \in \mathscr{L}\{\psi\}$ и g подчинен потенциалу, то ряд Фурье g по собственным функциям ψ_m оператора $\mathscr{B}_+$ сходится к g по норме в $\mathscr{H}$. Коэффициенты $\hat{g}_m$ этого ряда подсчитываются с помощью системы φ_m по формуле*

$$\hat{g}_m = (\psi_m, \varphi_m)_{\mathscr{H}}^{-1} \cdot (g, \psi_m)_{\mathscr{H}}. \tag{7}$$

Заметим, что полученный ряд Фурье совпадает с двукратным разложением элемента (g_0, g_1) по системе $\{f_m\}$. Для его сходимости в $\mathscr{H}$ (быть может, к элементу $\tilde{g}$, отличному от g) достаточна лишь подчиненность элемента g потенциалу.

Теорема 5 для случая $\dim E = 1$ содержится в ([6]). Случай оператора типа L на всей оси при $\dim E = 1$ изучен в ([7]).

В заключение отметим, что при условии $a_j = 0$ для любых финитных начальных данных проекция решения $(u(t),\ u_t(t))$ волнового уравнения на подпространство $\mathscr{K}$ разлагается в ряд по собственным функциям оператора $\mathscr{B}_+$, и этот ряд сходится по норме при достаточно больших t.

Теоремы 2—5 настоящей заметки сформулированы для случая, когда все корни $\mathscr{S}(k)$ простые. Формулировки для общего случая аналогичны, но в некоторых деталях более громоздки. Формулировка теоремы 1 сохраняется полностью.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
2 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Lax, R. Phillips, Scattering Theory, N. Y.— London, 1967. [2] B. Sz.-Nagy, C. Foias, Analyse Harmonique des Operateurs de l'espace de Hilbert, Budapest, 1967. [3] В. М. Адамян, Д. З. Аров, Матем. исслед., 1, в. 2, АН МССР, 1966. [4] Б. С. Павлов, ДАН, 193, № 1 (1970). [5] T. Regge, Nuovo Cim., 9, № 3 (1958); Сборн. пер. Математика, 7, 4 (1963). [6] А. О. Кравицкий, ДАН, 170, № 6 (1966). [7] М. В. Зак, Вестн. ЛГУ, сер. матем. и мех., 19 (1966).