Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 519.25

МАТЕМАТИКА

М. Б. НЕВЕЛЬСОН, Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 31 III 1971)

1. В работах [1-3] рассматривались условия устойчивости тривиального решения стохастических дифференциальных уравнений, описывающих марковские случайные процессы. Как известно [1, 2], задача устойчивости произвольного решения такого уравнения в l-мерном эвклидовом пространстве R^l может быть сведена к задаче устойчивости R^l-мерной гиперплоскости для марковского процесса в R^{2l}. Однако это сведение часто недостаточно для получения эффективных условий устойчивости. Цель настоящей заметки — показать, что любое решение автономного * стохастического дифференциального уравнения Ито в R^1, описывающего возвратный марковский процесс, устойчиво по вероятности в некоторой метрике r, естественным образом связанной с процессом **, причем «почти всегда» в этой метрике (более точную формулировку см. в п. 3) имеет место и устойчивость в целом. Заметим, что на любом компакте из R^1 метрика r эквивалентна эвклидовой.

2. Пусть $F(x)$ и $\sigma(x)$ — некоторые функции на R^1 для которых:

а) в каждом компакте из R^1 выполнены условия Липшица, причем $\sigma(x)$ нигде не обращается в нуль;

б) задача Коши для стохастического дифференциального уравнения Ито

$$dX(t) = F(X(t))dt + \sigma(X(t))d\xi(t), \quad X(0) = x \tag{1}$$

(здесь $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс, так что $\xi(0)=0$, $M\xi(t) = 0$, $D\xi(t) = t$) имеет почти наверное (п.н.) единственное, определенное при всех $t \geqslant 0$ решение, т. е. соответствующий марковский процесс регулярен ***;

в) интеграл от функции $g(x) = \exp\{-2\int\limits_0^x (F(u)\,/\,\sigma^2(u))du\}$ расходится в окрестности точек $\pm\infty$.

Как известно (см. [3], стр. 138), условие в) является необходимым и достаточным для возвратности траекторий марковского процесса, определяемого уравнением (1).

Отметим два хорошо известных свойства возвратных марковских процессов, описываемых уравнением (1):

1) из отрезков траектории возвратного процесса п.н. можно составить всюду плотное в пространстве $C_{[0,1]}$ множество; в частности, для любых $x, T, \alpha > 0$

$$P(\bigcup_{\tau>T}\{\sup_{\tau<t<\tau+1}|X(t)-x|<\alpha\}) = 1; \tag{2}$$

---

* То есть не зависящими от времени коэффициентами.

** Рассмотрение этой метрики эквивалентно рассмотрению процесса в канонической шкале, см. [4].

*** Как известно, для этого достаточно, например, выполнения условия $F^2(x) + \sigma^2(x) < c(1+x^2)$. Более общие условия регулярности даны в [3].

2) монотонная замена переменной

$$Y(t) = \int_0^{X(t)} g(u)\,du = G(X(t)) \qquad (3)$$

переводит процесс $X(t)$, описываемый уравнением (1) на R^1, в марковский процесс $Y(t)$ на R^1, описываемый стохастическим уравнением

$$dY(t) = \sigma_1(Y(t))\,d\xi(t), \quad Y(0) = y, \qquad (4)$$

где $\sigma_1(y) = \sigma(G^{-1}(y))\,g(G^{-1}(y))$ *.

Очевидно, при условиях а), б), в) уравнение (4) также имеет единственное п.н. решение задачи Коши, а процесс $Y(t)$ регулярен и возвратен.

Следующая простая лемма составляет основу наших рассмотрений.

Лемма 1. *Пусть $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ — два решения уравнения (4) на R^1, удовлетворяющие начальным условиям $Y_1(0) = y_1$, $Y_2(0) = y_2$, причем $y_1 < y_2$. Пусть далее для уравнения (4) выполнены условия единственности, регулярности (а значит, и возвратности).*

Тогда

$$Y_2(t) - Y_1(t) \to \zeta \quad \text{при } t \to \infty \quad (\text{п.н.}), \qquad (5)$$

где $\zeta \geqslant 0$ — п.н. конечная случайная величина.

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу единственности решения уравнения (4), отвечающего данному начальному условию, при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$Z(t) = Y_2(t) - Y_1(t) \geqslant 0. \qquad (6)$$

Пусть τ_R — момент первого выхода из круга радиуса R двумерного марковского процесса $(Y_1(t), Y_2(t))$, $\tau_R \wedge t = \min(\tau_R, t)$. Из известных свойств стохастического интеграла и (6) вытекает что процесс

$$Z(t) = y_2 - y_1 + \int_0^{\tau_R \wedge t} [\sigma_1(Y_2(s)) - \sigma_1(Y_1(s))]\,d\xi(s)$$

— положительный мартингал, так что

$$M(Z(\tau_R \wedge t)/\xi_0^s) = Z(\tau_R \wedge s), \quad t \geqslant s. \qquad (7)$$

(Здесь ξ_0^s — σ-алгебра событий, порожденная течением процесса $\xi(t)$ на отрезке $[0, s]$.) В силу предположенной регулярности $\lim\limits_{R\to\infty} \tau_R = \infty$ (п.н.) и потому, переходя в (7) к пределу при $R \to \infty$ и применяя лемму Фату, получим

$$M(Z(t)\,/\,\xi_0^s) \leqslant Z(t). \qquad (8)$$

Неравенства (6) и (8) означают, что $Z(t)$ — положительный супермартингал. Доказательство леммы заканчивается применением известной теоремы Дж. Дуба ((5), стр. 296).

Следствие. *В условиях леммы 1 любое решение уравнения (4), отвечающее детерминированному начальному условию, устойчиво в среднем и по вероятности.*

В самом деле, из (8) для всех $t \geqslant 0$ вытекает неравенство

$$M[Y_2(t) - Y_1(t)] \leqslant y_2 - y_1 \qquad (9)$$

и, значит,

$$\lim_{y_1 - y_2 \to 0} \sup_{t \geqslant 0} M[Y_2(t) - Y_1(t)] = 0.$$

* Особо подчеркнем, что преобразование (3), приводящее уравнение (1) к виду (4), можно сделать и для невозвратного процесса, однако лишь в возвратном случае прямая этим преобразованием переводится в прямую.

Из известных неравенств для супермартингалов и (9) находим также, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{y_1-y_2\to 0} P\{\sup_{t\geq 0} |Y_2(t)-Y_1(t)|>\varepsilon\}=0.$$

Следующая лемма позволяет установить условия устойчивости в целом произвольного решения уравнения (4).

Лемма 2. *В условиях леммы 1 справедливы следующие утверждения:*

1) *если функция $\sigma_1(y)$ непериодична, то для любых y_1 и y_2 разность $Y_2(t)-Y_1(t)$ стремится к нулю п.н. при $t\to\infty$,*

2) *если функция $\sigma_1(y)$ имеет период θ, то случайная величина ζ в (5) имеет распределение, сосредоточенное в двух точках $k\theta$ и $(k+1)\theta$, где* $k=[(y_2-y_1)/\theta]$; если при этом $k=(y_2-y_1)/\theta$ — целое число, то*

$$Y_2(t)-Y_1(t)=y_2-y_1 \quad (п.н.); \tag{10}$$

в частности, соотношение (10) *имеет место и в том случае, когда $\sigma_1(y)$ не зависит от y.*

Доказательство. Достаточно показать, что для всех y

$$\sigma(y+\zeta)=\sigma(y) \quad (\text{п.н.}). \tag{11}$$

Пусть это соотношение не выполняется. Тогда в силу непрерывности $\sigma(y)$ для некоторых y_0 и положительных δ, p_1

$$P\{\inf_{\substack{|y-y_0-J|<\delta\\ |z-y_0|<\delta}} |\sigma(y)-\sigma(z)|>\delta\}\geq p_1. \tag{12}$$

Применяя следствие 1 из ([6]), стр. 32, и используя вытекающее из леммы 1 существование конечного предела при $t\to\infty$ у стохастического интеграла

$$\int_0^t [\sigma_1(Y_2(s))-\sigma_1(Y_1(s))]\,d\xi(s),$$

нетрудно получить для произвольного $\varepsilon>0$ и $T>T_1(\varepsilon)$ неравенство

$$P\left\{\int_T^\infty [\sigma_1(Y_2(s))-\sigma_1(Y_1(s))]^2\,ds>\delta^2\right\}<\varepsilon. \tag{13}$$

В соответствии с (5), выберем число $T_2(\varepsilon)$ из условия

$$P\{\sup_{t>T_2} |Y_1(t)-Y_1(t)-J|>\delta/2\}<\varepsilon. \tag{14}$$

Используя первое из сформулированных выше свойств возвратного марковского процесса и (14), можно установить также, что существует случайная величина $\tau>\max(T_1(\varepsilon), T_2(\varepsilon))$, для которой

$$\sup_{\tau<s<\tau+1} |Y_1(s)-y_0|<\delta/2 \quad (\text{п. н.}),$$

$$P\{\sup_{\tau<s<\tau+1} |Y_2(s)-y_0-J|>\delta\}<\varepsilon.$$

Из (12), (13) и двух последних соотношений имеем цепочку неравенств

$$\varepsilon>P\left\{\int_\tau^\infty [\sigma_1(Y_2(s))-\sigma_1(Y_1(s))]^2\,ds>\delta^2\right\}\geq$$

$$\geq P\left\{\int_\tau^{\tau+1} [\sigma_1(Y_2(s))-\sigma_1(Y_1(s))]^2\,ds\right\}>\delta^2\right\}\geq p_1-\varepsilon.$$

---

* Здесь и далее символом $[x]$ обозначена целая часть числа x.

В силу произвольности ε последнее неравенство противоречит положительности p_1. Из (11) легко вытекает оба утверждения леммы.

3. Положим $r(x_1, x_2) = |G(x_1) - G(x_2)|$. Очевидно, функция $r(x_1, x_2)$ определяет на R^1 некоторое новое расстояние. Из лемм 1, 2 и свойства 2) возвратного марковского процесса $X(t)$ вытекает.

Теорема. *Пусть функции $F(x)$ и $\sigma(x)$ удовлетворяют условиям* а), б), в), *а $X_1(t)$, $X_2(t)$ — два решения уравнения* (1), *определяемые начальными условиями $X_1(0) = x_1$, $X_2(0) = x_2$ соответственно.*

Тогда с вероятностью 1 существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} r(X_1(t),\ X_2(t)) = J.$$

Для справедливости при всех x_1, x_2 соотношения $J \equiv 0$ (п.н.) необходимо и достаточно выполнения одного из следующих двух условий:

1) *процесс $X(t)$ не может быть получен монотонным преобразованием из возвратного марковского процесса на прямой R^1, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами одного и того же периода;*

2) *функция $\sigma_1(y) = \sigma(G^{-1}(y))g(G^{-1}(y))$ не является периодической. В случае, когда $\sigma_1(y)$ — периодическая функция периода θ, случайная величина J имеет распределение, сосредоточенное в двух точках $k\theta$ и $(k+1)\theta$, где $k = [|G(x_1) - G(x_2)|/\theta]$; если $k = |G(x_1) - G(x_2)|/\theta$ — целое число, то $r(X_1(t), X_2(t)) \equiv |G(x_1) - G(x_2)|$ (п.н.).*

Как и выше (см. следствие к лемме 1), нетрудно показать, что в условиях теоремы любое решение уравнения (1) устойчиво в среднем и по вероятности в метрике $r(x_1, x_2)$, т. е.

$$\lim_{x_1-x_2\to 0}\ \sup_{t\geq 0} Mr(X_1(t),\ X_2(t)) = 0,$$

$$\lim_{x_1-x_2\to 0} P\{\sup_{t\geq 0} r(X_1(t),\ X_2(t)) > \varepsilon\} = 0$$

(ε — произвольное положительное число).

Из этой теоремы легко вытекает также, что для положительно возвратного марковского процесса $J \equiv 0$ (п.н.). Отсюда легко получить новое доказательство эргодической теоремы для переходных вероятностей одномерных диффузионных процессов. Было бы интересно получить аналог доказанной теоремы для многомерных процессов.

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, Прикладная математика и механика, 27, 5, 809 (1960). [2] Г. Дж. Кушнер, Стохастическая устойчивость и управление, М., 1969. [3] Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969. [4] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, М., 1963. [5] Дж. Дуб, Вероятностные процессы, М., 1956. [6] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, Киев, 1968.