Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР Л. В. ОВСЯННИКОВ

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА КОШИ В ШКАЛЕ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Настоящая работа посвящена обобщению одной теоремы автора ([1]) на нелинейный случай. Формулируется понятие квазидифференциального оператора в шкале банаховых пространств. При небольших дополнительных предположениях о поведении нормы как функции параметра шкалы доказывается теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения с нелинейным квазидифференциальным оператором. В этой теореме нет никаких требований аналитичности ни по искомому элементу, ни по времени. Приводится пример применения теории в задаче о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.

Понятие сингулярного оператора в шкале банаховых пространств возникло у автора при изучении некоторых нелокальных эволюционных задач гидродинамики. Простейшим модельным примером задач этого типа может служить задача об отыскании в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ гармонической функции $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, зависящей от времени t, которая при $t \geqslant 0$ в точках $\tilde{x} \in \partial\Omega$ удовлетворяет уравнениям (n — нормаль к $\partial\Omega$)

$$(\partial / \partial t) u(\tilde{x}, t) = (\partial / \partial n) u(\tilde{x}, t), \qquad u(\tilde{x}, 0) = u_0(\tilde{x}) \tag{1}$$

с заданной функцией $u_0(\tilde{x})$. Здесь оператор $\partial / \partial n$ является нелокальным, так как значение образа в некоторой точке зависит от всех значений прообраза на $\partial\Omega$, и в то же время почти дифференциальным в том смысле, что он ухудшает свойство гладкости функции $u(\tilde{x}, t)$, грубо говоря, в той же степени, что и операторы дифференцирования по переменным $\tilde{x}$. Введя надлежащую шкалу банаховых пространств $S = \bigcup\limits_{0<\rho} B$ функций, аналитических на $\partial\Omega$ (предполагается, что $\partial\Omega$ — аналитическая поверхность), можно для оператора $l = \partial / \partial n$, так же как и для обычного дифференциального оператора первого порядка, получить оценку двух видов

$$\forall \rho' < \rho \Rightarrow \| lu \|_{\rho'} \leqslant \frac{c}{\rho - \rho'} \| u \|_{\rho}, \tag{2}$$

$$\| lu \|_{\rho} \leqslant c (\partial / \partial \rho) \| u \|_{\rho} \tag{3}$$

с константой c, не зависящей от a и ρ. В ([1]) сингулярным был назван оператор, допускающий оценку вида (2), которая, вообще говоря, значительно слабее оценки (3). Одной из сильных сторон полученной в ([1]) теоремы существования решения задачи типа (1) с абстрактным сингулярным оператором вместо $\partial / \partial n$ было то, что в ней предполагалось только свойство (2). Различным обобщениям этой теоремы было посвящено несколько исследований. В работах ([2–6]) доказаны и использованы в приложениях различные нелинейные варианты таких теорем для конкретных шкал банаховых алгебр аналитических функций с участием операторов вида (3). Абстрактные обобщения развиты в ([7, 8]). В основной теореме работы ([8]) также предполагается выполненным лишь свойство вида (2) в сочетании с требованием определенного сорта аналитичности правой части, причем разыскиваются решения, голоморфные по t. Попытки получить теорему существования для уравнения с нелинейной правой частью $f(u, t)$, которая только непрерывна по t и удовлетворяет аналогичной (2) оценке, но с фиксированным $r > 0$

$$\| u \|_{\rho} < r, \quad \| v \|_{\rho} < r \quad \forall \rho' < \rho \Rightarrow \| f(u, t) - f(v, t) \|_{\rho'} \leqslant \frac{c}{\rho - \rho'} \| u - v \|_{\rho}, \tag{4}$$

показывают, что требование «сингулярности» в нелинейном случае является, по-видимому, недостаточным. Оценка (4) гарантирует лишь единственность решения. Оказывается, что если вместо (4) предположить выполнение неравенства вида (3), ослабленного однако нелинейностью, то теорема существования решения задачи Коши имеет место при небольших дополнительных требованиях к норме в шкале банаховых пространств. Особенностью приводимой теоремы 1 является то, что, хотя в ней нет никаких условий аналитичности, из нее в качестве следствия вытекает теорема Коши — Ковалевской.

Определения и предположения. Пусть $S = \bigcup\limits_{0<\rho} B_\rho$ есть шкала банаховых пространств ([1]) и пусть $\|u\|_\rho$ есть норма элементов $u \in B_\rho$. Для любого вещественного $r > 0$ рассматриваются подмножества $O_\rho(r) = \{u \mid \|u\|_\rho < r\}$, $O(r, \rho_0) = \bigcup\limits_{0<\rho\leqslant\rho_0} O_\rho(r)$.

Определение 1. Отображение f: $O(r, \rho_0) \to S$ называется квазидифференциальным (оператором), если существует функция $F(y)$ вещественного переменного $y \geqslant 0$ такая, что $F \geqslant 0$, $F' \geqslant 0$, $F'' \geqslant 0$, с которой для любых $(u, v) \in O_\rho(r) \times O_\rho(r)$, $\rho < \rho_0$, выполнено неравенство

$$\|f(u) - f(v)\|_\rho \leqslant \left(1 + \frac{\partial}{\partial\rho}\right)[F(\|u\|_\rho + \|v\|_\rho)\|u - v\|_\rho]. \tag{5}$$

Пусть t — вещественный параметр и пусть отображение $f = f(u, t)$ зависит от t для $t \in T = \{t \mid 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$.

Определение 2. Отображение $f(u, t)$: $O(r, \rho_0) \times T \to S$ называется непрерывным по t, если для любых $\rho \leqslant \rho_0$, $u \in O_\rho(r)$ и $t \in T$ будет $\|f(u, t + \tau) - f(u, t)\|_\rho \to 0$ при $\tau \to 0$.

Дополнительные требования к шкале S (или к норме $\|\cdot\|_\rho$) таковы: (а) для любого $u \in S$ норма $\|u\|_\rho$ как функция параметра ρ выпукла вниз (не обязательно строго); (б) неравенство треугольника $\|u + v\|_\rho \leqslant \|u\|_\rho + \|v\|_\rho$ можно дифференцировать по ρ, т. е.

$$(\partial / \partial\rho)\|u + v\|_\rho \leqslant (\partial / \partial\rho)\|u\|_\rho + (\partial / \partial\rho)\|v\|_\rho. \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть в S выполнено свойство* (а). *Если квазидифференциальный оператор $f(u, t)$ непрерывен по t и если для любого $\rho < \rho_0$ отображение u: $T \to B_\rho$ непрерывно, причем $\|u(t)\|_\rho < r$, то суперпозиция $f(u(t), t)$: $T \to B_\rho$ также непрерывна.*

Основной результат. Рассматривается задача Коши об отыскании элемента $u = u(t) \in S$, удовлетворяющего уравнениям

$$du / dt = f(u, t), \quad u(0) = 0. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть $f(u, t)$: $O(r, \rho_0) \times T \to S$ есть квазидифференциальный оператор, непрерывный по t, и пусть $f(0, t) \in B_{\rho_0}$ для любого $t \in T$.*

Тогда задача (7) *имеет единственное решение $u(t) \in B_\rho$ для любого $\rho < \rho_0$ и достаточно малых $t \geqslant 0$. Точнее, существует такое $k > 0$, что $u(t) \in B_\rho$ для значений ρ, t из области*

$$\Delta = \{(\rho, t) \mid \rho + kt < \rho_0,\ t \geqslant 0,\ 0 < \rho < \rho_0\}. \tag{8}$$

Доказательство. Существование. Пусть $a(\rho) = \int\limits_0^\rho e^\sigma \sup\limits_{t\in T}\|f(0, t)\|_\sigma d\sigma$, откуда для $\rho < \rho_0$, $t \in T$ получается неравенство

$$e^\rho\|f(0, t)\|_\rho \leqslant a'(\rho). \tag{9}$$

Применяется метод последовательных приближений

$$u_0(t) = 0, \quad u_{n+1}(\tau) = \int\limits_0^t f(u_n(\tau), \tau)\, d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Из леммы 1 следует, что для любого $n \geqslant 0$ и любого $\rho < \rho_0$ приближение $u_n(t) \in B_\rho$ и непрерывно по t, во всяком случае для всех достаточно малых значений $t \geqslant 0$. Последовательности (10) сопоставляется последовательность функций $\delta_n = \delta_n(\rho, t)$, определяемых формулами

$$\delta_0 = \int_0^t \|f(0, \tau)\|_\rho \, d\tau, \quad \delta_n = \int_0^t \|f(u_n(\tau), \tau) - f(u_{n-1}(\tau), \tau)\|_\rho \, d\tau, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

Тогда $\|u_{n+1} - u_n\|_\rho \leqslant \delta_n$ и, в силу (6), также $(\partial / \partial\rho)\|u_{n+1} - u_n\|_\rho \leqslant \partial\delta_n / \partial\rho$. В терминах функции $\varphi_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \delta_k$ получаются оценки

$$\|u_{n+1}\|_\rho \leqslant \varphi_n, \quad (\partial / \partial\rho)\|u_{n+1}\|_\rho \leqslant (\partial / \partial\rho)\varphi_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Определение (11) и условие (5) дают неравенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta_{k+1} \leqslant \left(1 + \frac{\partial}{\partial\rho}\right)[F(\|u_{k+1}\|_\rho + \|u_k\|_\rho)\delta_k] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

суммирование которых по $k = 0, 1, \ldots, n-1$ с использованием свойств функции $F(y)$, оценок (12) и (9) показывает, что функция $e^\rho\varphi_n = \psi(\rho, t)$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяет соотношениям

$$\partial\psi / \partial t \leqslant R(\psi)\partial\psi / \partial\rho + a'(\rho), \quad \psi(\rho, 0) = 0, \tag{13}$$

где $R(y) = (\partial / \partial y)[yF(2y)]$. В области $\mathscr{D} = \{(\rho, t) \mid t \geqslant 0, 0 < \rho < \rho_0, \psi(\rho, t) < r\}$ для любого $k \geqslant R(r)$, в силу (13), будет $\psi_t \geqslant k\psi_\rho + a'(\rho)$ или, после интегрирования, $k\psi(\rho, t) \leqslant a(\rho + kt) - a(\rho)$. Поэтому, если число k выбрано согласно формуле $k = \max\{R(r), a(\rho_0) / r, \rho_0 / t_0\}$, то для области Δ, определенной в (8), будет справедливо включение $\Delta \subset \mathscr{D}$. На основании этих фактов существование решения задачи (7) в области Δ устанавливается с помощью стандартного рассуждения.

Единственность. По двум решениям $u = u(t)$, $v = v(t)$ задачи (7) строится функция

$$\psi(\rho, t) = e^\rho \int_0^t \|f(u(\tau), \tau) - f(v(\tau), \tau)\|_\rho \, d\tau.$$

Тогда $\|u - v\|_\rho \leqslant \psi$. С другой стороны, для ψ получаются также соотношения (13), но с нулем вместо $a'(\rho)$. Поэтому $\psi \equiv 0$ в области вида Δ, и доказательство закончено.

Аналогичный результат в классе аналитических функций $u(t)$ может быть получен как следствие теоремы 1 (при надлежащем определении понятия аналитичности отображения $f(u, t)$).

Пример. Задача о неустановившемся потенциальном движении несжимаемой жидкости со свободной границей ставится следующим образом (простейший вариант). Задается область $\Omega \subset R^3(x)$, гармоническая в Ω функция $\varphi_0(x)$ и поле массовых сил с потенциалом $g(x, t)$. Для $t \geqslant 0$ требуется определить область $\Omega(t) \subset R^3(x)$ и гармоническую в $\Omega(t)$ функцию $\varphi(x, t)$ так, чтобы на границе $\partial\Omega(t) = \{(x, t) \mid F(x, t) = 0\}$ были выполнены два условия, а именно, динамическое $\varphi_t + {}^1\!/_2|\nabla_x\varphi|^2 + g(x, t) = 0$ и кинематическое $F_t + \nabla_x\varphi \cdot \nabla_x F = 0$, и чтобы $\Omega(0) = \Omega$, $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$. Здесь ∇_x есть оператор — градиент в $R^3(x)$.

Задачи подобного типа удобно рассматривать в лагранжевых переменных (ξ, t), $\xi \in R^3$, где отображение $\xi \to x = x(\xi, t)$ определяется уравнениями $\partial x / \partial t = \nabla_x\varphi(x, t)$, $x(\xi, 0) = \xi$.

Переход к переменным (ξ, t) приводит к следующей эквивалентной формулировке: искомые функции $\varphi = \varphi(\xi, t)$ и вектор $x = x(\xi, t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\Omega: \begin{cases} x_t = M^{*-1}\nabla\varphi, & x(\xi, 0) = \xi, \\ \operatorname{div}(M^{-1}M^{*-1}\nabla\varphi) = 0, & \varphi(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \end{cases} \begin{matrix} (14) \\ (15) \end{matrix}$$

$$\partial\Omega: \varphi_t = {}^1\!/_2|M^{*-1}\nabla\varphi|^2 - g(x, t), \tag{16}$$

где $M = \partial x / \partial \xi$, M^{-1} — обратная и M^* — транспонированная матрицы M, а операции div и ∇ выполняются по переменным ξ.

Для дальнейшего существенна следующая вспомогательная задача об отыскании функции $\varphi(\xi)$, $\xi \in \Omega$:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} V, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = \psi. \tag{17}$$

Пусть $N(h, \omega)$ есть норма в пространстве $C_{1+\sigma}(\omega)$, $0 < \sigma < 1$, функции $h(\xi)$, заданной на гладком многообразии $\omega \subset R^3$. Пусть граница $\partial\Omega$ является аналитической поверхностью в R^3 и пусть ω обозначает либо Ω, либо $\partial\Omega$. Для построения шкалы $S(\omega) = \bigcup\limits_{0<\rho} B_\rho(\omega)$ банаховых пространств аналитических на ω функций $h(\xi)$ для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ определяются семейства d^n линейных дифференциальных операторов d_i^n порядка n, где i пробегает некоторое множество индексов $I_n(\omega)$. Норма в $B_\rho(\omega)$ есть

$$\|h, \omega\|_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \sup_{i \in I_n(\omega)} N(d_i^n h, \omega). \tag{18}$$

Выбор операторов d_i^n должен обеспечивать выполнение соотношений

1°) $\|h_1 h_2, \omega\|_\rho \leqslant \|h_1, \omega\|_\rho \cdot \|h_2, \omega\|_\rho$;

2°) $\|D_j h, \omega\|_\rho \leqslant (\partial/\partial\rho)\|h, \omega\|_\rho$, $D_j = \partial/\partial\xi_j$;

3°) $\|h|_{\partial\Omega}, \partial\Omega\|_\rho \leqslant \|h, \Omega\|_\rho$, $h|_{\partial\Omega} = h(\xi)$, $\xi \in \partial\Omega$.

Решающим шагом в исследовании задачи (14) — (16) является доказательство оценки решения задачи (17) в шкалах $S(\omega)$.

Лемма 2. *Семейства операторов d^n могут быть выбраны так, что для решения задачи* (17) *будет выполняться неравенство*

$$\|\nabla\varphi, \Omega\|_\rho \leqslant c\left(\|V, \Omega\|_\rho + \frac{\partial}{\partial\rho}\|\psi, \partial\Omega\|_\rho\right) \tag{19}$$

с постоянной c, не зависящей от V, ψ, ρ.

Один из возможных методов построения требуемых семейств операторов d^n изложен в ([3]) (в частном случае также в ([5])).

Теорема 2. *Пусть $\partial\Omega$ — аналитическая поверхность и пусть существуют числа ρ_0, t_0 такие, что $\varphi_0(\xi) \in B_{\rho_0}(\Omega)$ и $g(\xi, t) \in B_{\rho_0}(\Omega)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, причем $g(\xi, t)$ непрерывна по t в смысле определения.*

2. Тогда найдутся положительные числа ρ_1, t_1 такие, что для $\rho < \rho_1$, $0 \leqslant t < t_1$ решение $\varphi(\xi, t)$, $x(\xi, t) - \xi$ задачи (14) — (16) *существует и единственно в $B_\rho(\Omega)$.*

Для доказательства вводится в рассмотрение вектор-функция u, компонентами которой являются φ, координаты вектора $\varkappa - \xi$, а также все производные первого порядка от этих величин по переменным ξ (всего 16 компонент). Аналогично тому, как это делается в случае дифференциальных уравнений, задача (14) — (16) сводится к равносильной квазилинейной задаче для u. Норма $u \in B_\rho(\omega)$ определяется как максимум из норм $\|\cdot, \omega\|_\rho$ компонент вектора u. Основная оценка (5) выводится с помощью неравенств 1° — 3° и (19). Требования (а) и (б) к шкале S выполнены в силу определения (18). Остальное следует из теоремы 1.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
28 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Овсянников, ДАН, 163, № 4 (1965). [2] Л. В. Овсянников, Сборн. Неустановившиеся движения жидкости со свободной границей, «Наука», 1967. [3] В. И. Налимов, ДАН, 183, № 1 (1968). [4] В. И. Налимов, ДАН, 189, № 1 (1969). [5] Л. В. Овсянников, Сборн. Некоторые проблемы математики и механики, «Наука», 1970. [6] Г. В. Демидов, Информ. бюлл. Численные методы механики сплошной среды, 1, № 2, Новосибирск, 1970. [7] F. Treves, Ovsyannicov Theorem and Hyperdifferential Operatore. Instituto de Matematica Pure e Aplicada, Rio de Janeiro, 1968. [8] F. Treves, Transactions of the AMS, 150, № 1, 77 (1970).