

УДК 532.13

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В. А. ПАВЛОВСКИЙ

К ВОПРОСУ О ТЕОРЕТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ СЛАБЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 14 IV 1971)

Теория движения вязкой жидкости, основанная на уравнениях Навье — Стокса, не в состоянии описывать течения слабых водных растворов полимеров. В настоящее время можно с уверенностью сказать, что теория Навье — Стокса не учитывает некоторых свойств сплошной среды, которые могут оказаться существенным при описании течения жидкости в общем случае неустановившегося движения (¹). Проявление этих свойств при течении потоков с малыми добавками полимеров приводит к рассогласованию существующей теории и эксперимента. По нашему мнению, такими свойствами являются релаксационные свойства жидкости, которые резко отличаются для воды и растворов полимеров (²).

Наличие у жидкости релаксационных свойств свидетельствует о том, что равновесное состояние в жидкости, соответствующее реологическому закону Ньютона, устанавливается не мгновенно после изменения внешних условий, как этого требует этот закон, а спустя какое-то время, характеризующее значением времени релаксации. Это означает, что учет релаксационных свойств есть не что иное, как учет временной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций движущейся жидкости. Наличие этой временной связи приводит к появлению угла сдвига фаз между напряжением и скоростью деформации движущейся жидкости и, следовательно, к дополнительным потерям механической энергии потока, дополнительным по отношению к диссипативным потерям вследствие вязкости. Эти дополнительные потери механической энергии потока необходимо учитывать в общем случае неустановившегося движения жидкости.

В результате учета временной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций для несжимаемой вязкой жидкости было предложено следующее реологическое соотношение (³):

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{E} + 2\mu\dot{\mathbf{S}} + 2\frac{k}{\theta} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta}\right) \frac{d}{dt'} \dot{\mathbf{S}}(t') dt', \quad (1)$$

где $\mathbf{P}$ — тензор напряжений; $\mathbf{E}$ — единичный тензор; $\dot{\mathbf{S}}$ — тензор скоростей деформации; p — давление в жидкости; μ — динамическая вязкость жидкости; k , θ — физические константы, характеризующие релаксационные свойства жидкости (релаксационная вязкость и время релаксации соответственно); t , t' — время, независимая переменная; d/dt' — полная производная по времени (содержит локальную и конвективную составляющие).

Соотношение (1) можно упростить, используя лишь первый член разложения интегрального члена:

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{E} + 2\mu\dot{\mathbf{S}} + 2k \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{S}}. \quad (2)$$

Пренебрегая членами, содержащими произведения производных в силу принципа малости относительных скоростей деформаций при течении жидкости, который, по существу, лежит в основе современной гидромеханики, можно получить уравнения движения жидкости, соответствующие соотношению (2):

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v_i + \frac{k}{\rho} \frac{d}{dt} (\Delta v_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где v_i — компоненты вектора скорости в декартовой системе координат; f_i — компоненты вектора напряженности массовых сил; ν — кинематическая вязкость жидкости; ρ — массовая плотность жидкости; ∇ — оператор Гамильтона; Δ — оператор Лапласа.

Релаксационная вязкость в уравнениях (3) есть физическая константа, характеризующая релаксационные свойства жидкости, ее значение зависит от вида полимера и его концентрации.

Уравнения движения (3) отличаются от уравнений Навье — Стокса добавочным членом, учитывающим релаксационные свойства жидкости. В случае чрезвычайно слабых релаксационных свойств жидкости ($k \approx 0$), а также в случае установившегося характера движения жидкости, когда полная производная по времени от тензора скоростей деформаций равна нулю (это имеет место, например, при установившемся ламинарном движении жидкости в трубе), добавочный член пропадает и уравнения (3) совпадают с уравнениями Навье — Стокса. В случае турбулентного режима движения жидкости, который является существенно неустановившимся, добавочный член отличен от нуля и должен играть значительную роль. Именно таким образом ведут себя потоки слабоконцентрированных водных растворов полимеров.

Из уравнений движения (3) следует, что различие между течением воды и растворов полимеров должно быть и при неустановившемся ламинарном режиме, что связано с различием релаксационных свойств этих жидкостей. Проведенные нами экспериментальные исследования пульсирующего ламинарного движения растворов полимеров и воды подтвердили этот вывод.

Пользуясь правилами осреднения Рейнольдса, можно получить осредненные уравнения турбулентного движения, которые для квазистационарного турбулентного режима будут иметь вид

$$\rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \Delta \bar{v}_i + k \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (- \overline{\rho v'_i v'_j} + k \overline{v'_j \Delta v'_i}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где черта означает осреднение по времени, а штрихами обозначены пульсационные величины.

При анализе энергетического баланса жидкости при турбулентном движении из уравнений (4) видно, что для жидкости с ярко выраженными релаксационными свойствами ($k \neq 0$) энергия потока расходуется не только на преодоление вязкостных потерь и поддержание турбулентных пульсаций, но и на дополнительные потери, связанные с релаксационными свойствами жидкости. Это при прочих равных условиях приводит, по сравнению с жидкостью со слабыми релаксационными свойствами (например, водой), к тому, что доля энергии турбулентных пульсаций в растворе полимера должна уменьшиться, в результате чего интенсивность турбулентных пульсаций также должна снизиться. Это имеет место при добавлении в поток жидкости малых количеств полимерных веществ.

С помощью уравнений (4) можно решить задачу о турбулентном движении вязкой жидкости с релаксационными свойствами вблизи безграничной твердой стенки. Используя известные идеи Прандтля о связи

между осредненными и пульсационными скоростями (4)

$$v_i' \sim l dU/dy; \quad l = \kappa y,$$

можно прийти к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению третьего порядка, которое определяет профиль скорости в зоне развитого турбулентного течения:

$$y^2 \frac{dU}{dy} \frac{d^3 U}{dy^3} + 2y \frac{dU}{dy} \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{\rho}{\kappa} y^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 - \frac{\tau_w}{\kappa \kappa^2} = 0. \quad (5)$$

Начальные условия будут иметь вид

$$y \rightarrow \infty, \quad dU/dy \rightarrow 0; \quad y = \alpha \nu/v_*, \quad U = \alpha v_*, \quad dU/dy = v_*^2/\nu. \quad (6)$$

В соотношениях (5) и (6) U — осредненная скорость потока в рассматриваемой точке; y — расстояние от стенки; τ_w — напряжение трения на стенке; $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — динамическая скорость; α , κ — константы.

Решение уравнения (5) с начальными условиями (6) в безразмерном виде можно записать как

$$\Phi = 2,5 \int_a^\eta \frac{\gamma(\eta)}{\eta} d\eta + \alpha, \quad (7)$$

где $\Phi = U/v_*$ — безразмерная скорость; $\eta = yv_*/\nu$ — безразмерное расстояние от стенки.

В выражение (7) входит безразмерная функция γ , определяемая из соотношения

$$\eta = \alpha + \int_b^\eta \frac{d\gamma}{l_* \sqrt{\rho/k} \sqrt{a \ln \gamma - \gamma^2 + 1}}, \quad (8)$$

где $l_* = \nu/v_*$ — динамическая длина; a , b — некоторые постоянные, которые надо определить экспериментально.

Анализ соотношений (7) и (8) показывает, что профиль скорости в зоне развитого турбулентного режима не сразу приобретает логарифмический характер, а приближается к нему при росте безразмерного расстояния от стенки. При этом оказывается, что профиль скорости $\Phi(\eta)$ зависит в общем случае от значения релаксационной вязкости k (т. е. от релаксационных свойств потока) и от значения динамической длины l_* . Последнее является теоретическим объяснением «эффекта диаметра», проявляющимся при течении жидкостей с ярко выраженными релаксационными свойствами, какими являются слабые растворы полимеров. Действительно, при течении жидкости в трубе динамическая длина l_* при прочих равных условиях является функцией диаметра трубы.

На рис. 1 приведены безразмерные профили скорости, соответствующие соотношениям (7) и (8) при некоторых значениях параметров a , b и $n = l_* \sqrt{\rho/k}$. График показывает полное качественное согласование теоретических профилей слабых водных растворов полимеров с экспериментально полученными разными исследователями. Для обеспечения количественного согласования теории и эксперимента остается экспериментально определить значение тех констант, которые входят в соотношения (7) и (8).

Таким образом, теоретическое описание течений слабых водных растворов полимеров возможно на основе общих принципов механики сплошных сред, учитывая в реологическом соотношении вязкой жидкости временную связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций. Согласно уравнениям движения (3), введение в поток высокополи-

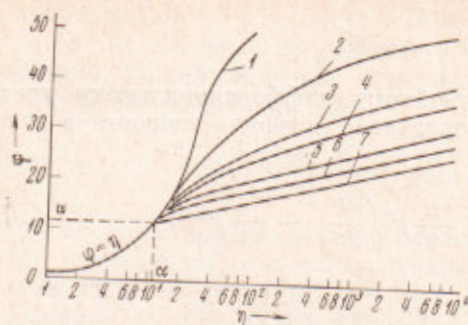


Рис. 1. Безразмерные профили скорости, соответствующие соотношениям (7) и (8) при разных значениях параметров a , b , n :

	1	2	3	4	5	6
a	70	10	4,7	10	16	4,7
b	10	3	2	2	2	2
n	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-1}

Профиль 7 соответствует течению воды ($k \approx 0$).

Знаю благодарность В. В. Новожилову за обсуждение работы, замечания и предложения.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступило
8 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Седов, Механика сплошной среды, 2, «Наука», 1970. ² Р. А. Ramchandran, Popular. Plastics (Bombay), 12, № 12, 30 (1968). ³ Я. И. Войткунский, В. Б. Амфилохий, В. А. Павловский, Сборн. Тр. Ленингр. кораблестр. инст., в. 69, 1970. ⁴ О. И. Хинце, Турбулентность, М., 1963.