Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 513.6 МАТЕМАТИКА

В. П. ПЛАТОНОВ

О ПРОБЛЕМЕ РОДА В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРУППАХ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 25 III 1971)

Пусть G — связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем Q рациональных чисел; Z_p — кольцо целых p-адических чисел.

Говорят, что элементы $a, b \in G_Z$ принадлежат одному G-роду, если они сопряжены в группах G_Q и G_{Z_p}. Заметим, что ввиду G_Q-сопряженности a и b они автоматически сопряжены в почти всех G_{Z_p}.

Пусть $[a]_G$ обозначает множество элементов G_Z, принадлежащих G-роду a; короче $[a]_G$ обозначает G-род a. $[a]_G$ разбивается на классы относительно G_Z-эквивалентности. Множество классов в $[a]_G$ обозначим через $M([a]_G)$. Можно определить для всякого $a \in G_Z$ $f_G(a) = \operatorname{ord}(M([a]_G))$.

Проблема рода заключается в исследовании функции $f_G(a)$, в частности, в получении оценок для f_G. Оказывается, $f_G(a) < \infty$ и верна следующая

Основная теорема. *Если G — полупростая Q-изотропная группа, т. е. $\operatorname{rank}_Q G > 0$, то для всякой арифметической подгруппы $H \subset G_Z$ $\sup\limits_{a \in H} f_G(a) = \infty$.*

Иными словами, *число классов в роде конечно, но не является в совокупности ограниченным.*

Доказательство основной теоремы опирается на идеи и результаты предыдущих работ автора ([1], [2]) и классификацию полупростых алгебраических групп ([4]). До последнего времени основная теорема не была доказана даже для $G = SL(n, K)$ ([3]).

Ниже приводится почти полное доказательство основной теоремы для разложимых групп. В общем случае идея доказательства аналогична, хотя ее техническое осуществление значительно сложнее. Решающую роль в доказательстве играют аппроксимационная теорема ([1]) и оценка числа двойных классов в группах аделей некоторых редуктивных групп. Хорошо известно, что в общем случае получение оценок для числа двойных классов редуктивных алгебраических групп является очень трудной проблемой, содержащей в качестве весьма частных случаев классические проблемы о числе классов в роде квадратичных форм (Гаусс) и о числе классов идеалов числовых полей.

Представляется вероятным, что условие $\operatorname{rank}_Q G > 0$ в основной теореме несущественно. Это можно доказать для некоторых классических групп G (разумеется, следует предполагать, что при $\operatorname{rank}_Q G = 0$ группа вещественных точек G_R некомпактна).

Замечание 1. Можно было бы определить более грубое понятие G-рода, если исключить условие G_Q эквивалентности. Нетрудно показать, что такой «грубый» G-род есть объединение конечного числа G-родов в нашем смысле, если использовать теорему конечности для орбит из ([5]).

Замечание 2. В процессе доказательства получается более точный результат $\sup\limits_{a \in F_Z} f_G(a) = \infty$, где F — некоторая Q-разложимая трехмерная подгруппа G.

В дальнейшем через G_A обозначается группа аделей G; $G_{A(\infty)}$ и G_Q — соответственно подгруппа целых и главных аделей G_A.

Хорошо известно, что $G_A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (G_Q x G_{A(\infty)})$ ([5]).

Теорема 1. *Пусть Ω^a — централизатор a в G; $\nu(\Omega^a)$ — множество двойных классов группы аделей $\Omega_A{}^a$, лежащих в $G_Q G_{A(\infty)}$.*

Тогда существует естественная биекция $\varphi: \nu(\Omega^a) \to M([a]_G)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что всякий двойной класс $\Omega_Q{}^a x \Omega^a_{A(\infty)}$ либо не пересекается с $G_Q G_{A(\infty)}$, либо входит в $G_Q G_{A(\infty)}$ целиком. Пусть $x \in X \in \nu(\Omega^a)$, тогда $x = g_Q g_{A(\infty)}$, $g_Q \in G_Q$, $g_{A(\infty)} \in G_{A(\infty)}$. Так как $xax^{-1} = a$, то $g_Q{}^{-1} a g_Q = g_{A(\infty)} a g^{-1}_{A(\infty)} \Rightarrow g_Q{}^{-1} a g_Q = g_p a g_p{}^{-1}$, где $g_p \in G_{Z_p}$ и является p-компонентой $g_{A(\infty)}$. Значит, $g_Q{}^{-1} a g_Q \in [a]_G$. Следовательно можно определить отображение φ: $x \to g_Q{}^{-1} a g_Q \in a_x \in M([a]_G)$. Убедимся в его корректности. Пусть $x = g_Q^{(1)} g_{A(\infty)}^{(1)} = g_Q g_{A(\infty)}$. Тогда $g_Q^{-1} g_Q^{(1)} = g_{A(\infty)} (g^{(1)}_{A(\infty)})^{-1} \Rightarrow g_Q^{-1} g_Q^{(1)} \in G_Z \Rightarrow (g_Q^{(1)})^{-1} a g_Q^{(1)} \in$ классу a_x. Если рассмотреть любой элемент из двойного класса $\Omega^a_Q x \Omega^a_{A(\infty)}$, то емубудет соответствовать элемент из класса a_x, так как Ω^a_Q централизует a.Докажем сюръективность. Пусть $a_i \in A_i \in M([a]_G)$. Тогда $g_Q{}^{-1} a g_Q = g_{A(\infty)} a g^{-1}_{A(\infty)} = a_i$ для подходящих g_Q и $g_{A(\infty)}$. Значит, $g_Q g_{A(\infty)} = \Omega^a_A \Rightarrow \varphi(\Omega_Q{}^a g_Q g_{A(\infty)} \Omega^a_{A(\infty)}) = A_i$.

Остается показать, что φ инъективно. Действительно, пусть $\varphi(x)$ и $\varphi(x_1)$ принадлежат одному классу в $M([a]_G)$. Если $x = qf$, $x_1 = q_1 f_1$; q, $q_1 \in G_Q$, f_1, $f_1 \in G_{A(\infty)}$, тогда существует $\delta \in G_Z$, что

$$\delta f_1 a f_1^{-1} \delta^{-1} = \delta q_1^{-1} a q_1 \delta^{-1} = faf^{-1} = q^{-1} a q,$$
$$\Downarrow$$
$$f^{-1} \delta f_1 \in \Omega^a_{A(\infty)}, \quad q \delta q_1^{-1} \in \Omega^a_Q,$$

и далее, $f_1 \in \delta^{-1} f \Omega^a_{A(\infty)}$, $q_1 \in \Omega^a_Q q \delta$, откуда $q_1 f_1 \in \Omega^a{}_A\, qf \Omega^a_{A(\infty)}$, т. е. $x_1 \in \in \Omega^a_Q x \Omega^a_{A(\infty)}$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Число классов $f_G(a)$ конечно для любого $a \in G_Z$.*

Действительно, по теореме 1 оно не превосходит числа двойных классов группы аделей $\Omega_A{}^a$, которое конечно по теореме Бореля ([5]).

Следствие 2. *Если группа G обладает свойством сильной аппроксимации, то $f_G(a)$ равно числу двойных классов группы аделей Ω^a_A.*

Следствие 3. *Если G — унипотентная группа, то $f_G(a) = 1$.*

Это немедленно вытекает из теоремы 1 и аппроксимационной теоремы.

Предложение 1. *Пусть φ: $G \to G'$ — изогения над Q.*

Тогда $\sup\limits_{a \in H} f_G(a) = \infty \Rightarrow \sup\limits_{a' \in H'} f_{G'}(a') = \infty$, *где H' — произвольная подгруппа конечного индекса в $G_Z{}'$.*

Замечание 3. Разумеется, для произвольных гомоморфизмов φ предложение 1 теряет силу. Но на самом деле требование конечности $\operatorname{Ker}\varphi$ несущественно в том смысле, что в действительности предложение 1 верно во всех случаях, когда имеется такое множество $M \subset G_Z$, что $\sup\limits_{a \in M} f_G(a) = \infty$ и φ инъективно на M.

Предложение 2. *Пусть $G = SL(2, K)$, H — произвольная подгруппа конечного индекса в $SL(2, Z)$.*

Тогда $\sup\limits_{a \in H} f_G(a) = \infty$.

Следствие 4. *Для всякой группы G типа A_1* $\sup\limits_{a \in H} f_G(a) = \infty$.

Предложение 3. *Пусть G— полупростая алгебраическая группа, обладающая такой Q-разложимой подгруппой F типа A_1, что для одномерного тора $T \subset F$ централизатор $Z_G(T) = TS$, где $S = (Z_G(F))^0$.*

Тогда $\sup\limits_{a \in F_Z} f_G(a) = \infty$.

Доказательство. Пусть $R = FS$, где произведение почти прямое. Известно, что подгруппы R_Z и $F_Z S_Z$ соизмеримы (см. ([6])). Выберем в Q-торе T элемент $a \in T_Z$ бесконечного порядка. Тогда $\Omega^a = Z_G(a) = TS$.

Так как для $s \in S_Z$ $\quad sas^{-1} = a$, то нетрудно показать, что число классов $f_R(a)$ в R-роде элемента a имеет оценку $f_R(a) \geqslant \frac{1}{[R_Z : F_Z S_Z]} f_F(a)$. По теореме 1 число классов в R-роде элемента a не меньше числа двойных классов в группе аделей группы $Z_R(a)$. Ввиду выбора a, $Z_R(a) = TS = \Omega^a$. Следовательно, $f_G(a) \geqslant \frac{1}{[R_Z : F_Z S_Z]} f_F(a)$. Для завершения доказательства необходимо применить следствие 4.

Теорема 2. *Пусть G — полупростая разложимая группа.*

Тогда существует подгруппа F типа A_1, удовлетворяющая условиям предложения 3. За исключением групп типа A_n, $n > 1$, в качестве F может быть выбрана регулярная подгруппа.

Доказательство. Прежде всего заметим, что можно считать группу G простой, так как всякая полупростая разложимая Q-группа является почти прямым произведением простых Q-подгрупп. Впрочем, согласно предложению 1 группу G можно считать односвязной и тогда она есть прямое произведение простых групп.

Пусть сначала G имеет тип A_l; тогда предложение 1 позволяет считать, что $G = SL(l+1, K)$. Как нетрудно проверить, в качестве F можно взять подгруппу.

$$\begin{pmatrix} SL(2, K) & 0 \\ 0 & E_{l-1} \end{pmatrix}.$$

Теперь будем считать, что $G \not\cong SL(l+1, K)$. Пусть l — ранг группы G; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ — система простых корней G относительно некоторого Q-разложимого максимального тора. Для простых корней принимаем стандартную нумерацию, соответствующую схемам Дынкина (см. ([4], [7], [8])); через δ обозначим наименьший корень системы корней группы G. Как обычно, $x_\beta(t_\beta)$ — унипотентная однопараметрическая подгруппа, соответствующая корню β.

Для всякого α_i обозначим через G_{α_i} подгруппу группы G, порожденную всеми x_{α_j}, $j \neq i$, и x_δ. Тогда G_{α_i} — максимальная регулярная полупростая подгруппа G (([7]), $n°18$; ([8])). Путем несложных, хотя и несколько громоздких, вычислений можно определить все подгруппы G_{α_i} (иногда они могут совпадать с группой G). Это сделано в ([7]), $n°18$, и мы воспользуемся этими вычислениями. Ограничимся особыми группами, рассмотрение которых часто доставляет наибольшие затруднения. Мы указываем только те G_{α_i} которые годятся для доказательства теоремы. Через F обозначаем простую инвариантную подгруппу типа A_1.

1. G типа G_2. Тогда $G_{\alpha_1} = FS$, где S типа A_1 и S совпадает с полупростой частью централизатора $Z_G(h_{\alpha_1}) = h_{\alpha_1}S$, где $h_{\alpha_1} = (\operatorname{Ker} \alpha_2)^0$. Так как в F торы сопряжены, то аналогичное разложение верно для всякого $T \subset F$.

2. G типа F_4. $G_{\alpha_1} = FS$, где S типа C_3, и далее, как в случае 1. А именно, если $h_{\alpha_1} = (\bigcap_{j=2}^{4} \operatorname{Ker} \alpha_j)^0$, то $Z_G(h_{\alpha_1}) = h_{\alpha_1}S$.

3. G типа E_6. $G_{\alpha_6} = FS$, где S типа A_5 и получается выбрасыванием корня α_6. Снова для $h_{\alpha_6} = (\bigcap_{j=1}^{5} \operatorname{Ker} \alpha_j)^0$ имеем $Z_G(h_{\alpha_6}) = h_{\alpha_6}S$.

4. G типа E_7. $G_{\alpha_1} = FS$, где S типа D_6 и получается выбрасыванием корня α_1.

5. G типа E_8. $G_{\alpha_1} = FS$, где S типа E_7 и получается выбрасыванием корня α_1.

Отметим, что во всех случаях используется связность централизатора произвольного тора.

Аналогично рассматриваются группы типов B_l, C_l, D_l. Из построения группы F следует, что во всех этих случаях она оказывается регулярной.

Теорема 2 доказана.

Замечание 4. Для большинства особых типов доказательство совершенно аналогично и для неразложимых групп, если использовать классификационные результаты из ([4]). В общем случае приходится вычислять централизаторы некоторых нерегулярных подгрупп G, что существенно усложняет доказательство.

Доказательство основной теоремы для разложимой группы G непосредственно следует из теоремы 2 и предложения 3.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Минск

Поступило
22 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Платонов, Изв. АН СССР, сер. матем., **33**, № 6, 1211 (1969). [2] В. П. Платонов, Изв. АН СССР, сер. матем., **33**, № 1, 155 (1969). [3] В. П. Платонов, Г. В. Матвеев, Докл. АН БССР, **14**, № 9, 177 (1970). [4] J. Tits, Proc. Symp. Pure Math., **9**, 32 (1966). [5] Borel, Publ. Math., I.H.E.S., № 16, 101 (1963). [6] A. Borel, Harish-Chandra, Ann. Math., **75**, № 2, 485 (1952). [7] Е. Б. Дынкин, Матем. сборн., **30**, № 3, 349 (1952). [8] R. Carter, Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, 1970, p. 61. [9] A. Borel, J. Tits, Publ. Math., I.H.E.S., № 27, 55 (1965).