Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 539.3 — *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

В работе рассматривается потеря устойчивости сферической оболочки под равномерным внешним давлением. Оболочка имеет форму сегмента, защемленного по краю. Устанавливается независимость критического давления от формы потери устойчивости. Рассматривается динамика начальной стадии выпучивания оболочки в результате потери устойчивости. С помощью естественного физического условия определяется истинная форма потери устойчивости и характер закритической деформации.

1. Согласно вариационному принципу B ((1), стр. 140) определение критической нагрузки для строго выпуклой оболочки сводится к рассмотрению вариационной задачи для функционала $W = U - A$ на разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной поверхности оболочки. Именно, если нагрузка критическая, то задача имеет нетривиальное решение. Бесконечно малое изгибание, являющееся решением, дает основное приближение деформации оболочки в момент потери устойчивости. Функционал W определен на бесконечно малых изгибаниях с разрывами, удовлетворяющими условию $\Delta\tau = \sigma e$. Здесь $\Delta\tau$ — разрыв изгибающего поля, а e — единичный вектор бинормали кривой γ, вдоль которой происходит разрыв.

Слагаемое U функционала W (энергия деформации) определяется по формуле

$$U = \int\limits_{\gamma} \frac{2E\delta^2\alpha^2\sigma}{\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\rho}\, ds. \tag{1}$$

Здесь ρ — радиус кривизны кривой γ, где происходит разрыв изгибающего поля; α — угол между соприкасающейся плоскостью кривой γ и касательной плоскостью поверхности; σ — величина разрыва изгибающего поля; δ — толщина оболочки; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона. Интегрирование выполняется по дуге s кривой γ. Слагаемое A функционала W определяется обычным образом как производимая внешней нагрузкой работа при деформации, задаваемой изгибающим полем.

Заметим, что условие $\Delta\tau = \sigma e$ на γ эквивалентно требованию непрерывности составляющей поля τ по касательной к γ. Действительно, пусть $\Delta\tau\cdot dr = 0$. Дифференцируя это равенство вдоль γ, получим $\Delta d\tau\cdot dr + \Delta\tau\cdot d^2r = 0$. Так как поле τ изгибающее, то $d\tau\cdot dr = 0$. Поэтому $\Delta\tau\cdot d^2r = 0$. Из равенств $\Delta\tau\cdot dr = 0$, $\Delta\tau\cdot d^2r = 0$ следует, что вектор $\Delta\tau$ направлен по бинормали кривой γ, т. е. допускает представление $\Delta\tau = \sigma e$.

2. Формула (1) в (1) выводится в предположении малости угла α между соприкасающейся плоскостью кривой γ и касательной плоскостью к срединной поверхности. С небольшими изменениями этот вывод распространяется на случай любых значений α. При этом в числителе подынтегрального выражения появляется вместо α^2 величина $\sin^2\alpha$. Естественно, при малых α $\sin\alpha \simeq \alpha$ и мы получаем формулу (1).

При вводе формулы (1) предполагалось, что деформация оболочки вдоль кривой γ в направлении, перпендикулярном γ, равна нулю. Это предположение сделано для простоты вывода. Если же не вводить каких-либо предположений о характере деформаций вблизи кривой γ, как это сделано в аналогичном выводе в ([2]), то в знаменателе формулы (1) будет не $1-\nu^2$, а $\sqrt{1-\nu^2}$. Тот же результат получается, если вместо равенства нулю указанных деформаций принять равными нулю соответствующие им напряжения в срединной поверхности оболочки.

Принимая во внимание сделанные замечания, получаем следующее уточненное выражение для энергии дефомации:

$$U=\int\limits_{\gamma}\frac{2E\delta^2\sin^2\alpha\,\sigma}{\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\rho}\,ds. \tag{2}$$

3. Рассмотрим потерю устойчивости сферического сегмента. Ввиду жесткости закрепления края сегмента изгибающее поле τ, дающее решение вариационной задачи для функционала W, равно нулю у края сегмента, а, следовательно, и всюду вне области, ограниченной линией γ разрыва поля. Замечая, что $\sin\alpha/\rho=1/R$, где R — радиус кривизны сегмента, можем записать функционал W в виде

$$W=\int\limits_{\gamma}\frac{2E\delta^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\frac{\sigma_{n'}}{R}\,ds-\iint\limits_{G}p\sigma_n dS. \tag{3}$$

Здесь σ_n — нормальная к срединной поверхности составляющая поля τ, а σ_n' — составляющая поля τ по внутренней геодезической нормали к кривой γ на срединной поверхности ($\sigma_n'=\sigma\sin\alpha$).

Отметим следующее равенство:

$$\int\limits_{\gamma}\sigma_{n'}ds=\frac{2}{R}\iint\limits_{G}\sigma_n dS. \tag{4}$$

Это геометрическое равенство допускает простую физическую интерпретацию. Оно выражает собой условие равновесия области G сегмента как безмоментной оболочки под действием единичной нагрузки, действующей по краю γ области G, и внешнего давления по поверхности величиной $2/R$. Принимая во внимание равенство (4), можем представить функционал W в виде

$$W=\left(\frac{4E}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2-p\right)\iint\limits_{G}\sigma_n dS. \tag{5}$$

Рассмотрим изгибающие поля $\tau_\lambda=\lambda\tau$. Значение функционала W на поле τ_λ, очевидно, равно $\lambda W(\tau)$. Так как функционал W стационарен на поле τ, то $\partial W/\partial\lambda=0$ при $\lambda=1$. Отсюда следует, что критическое давление p, при котором оболочка теряет устойчивость, удовлетворяет уравнению

$$\frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2-p=0. \tag{6}$$

Мы видим, что критическое внешнее давление определяется по известной формуле для сферических оболочек и не зависит от формы потери устойчивости, т. е. от изгибающего поля τ.

4. Рассмотрим динамику деформации оболочки в начальной стадии выпучивания в результате потери устойчивости. В связи с этим мы снова обратимся к выводу формулы (1). Эта формула получается из рассмотрения некоторой вариационной задачи (([1]), стр. 134). Именно, подынтегральное выражение формулы (1) является минимумом функционала

$$\bar U=\frac{E\delta^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)}\int\limits_0^\infty(v'^2+u^2)\,ds.$$

При условиях

$$\frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}}\int\limits_0^\infty v^2ds=\sigma,\quad u'+v+v^2/2=0$$

$u(0)=u(\infty)=v(\infty)=0.$

В работе [1] получена основная (линейная) часть по σ функционала $\overline{U}$. Для целей настоящего исследования нам понадобится следующий, квадратичный по σ член. Такой член получен численным решением упомянутой вариационной задачи. Соответствующее выражение для энергии деформации имеет вид

$$U = \int_\gamma \frac{2E\delta^2 \sin^2\alpha\,\sigma}{\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\rho}\,ds - \int_\gamma \frac{E\delta^2\sin^2\alpha}{\sqrt{12(1-\nu^2)}\rho}\,\frac{\sigma^2}{\sqrt{\delta\rho\sin\alpha}}\,ds.$$

В частности, для сферической оболочки радиуса R

$$U = (*) - \int_\gamma \frac{E}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2\sqrt{\frac{R}{\delta}}\,\sigma^2 ds. \tag{7}$$

Деформация оболочки во времени определяется из общего вариационного принципа, согласно которому функционал

$$W' = K - U + A$$

стационарен. Здесь K — кинетическая энергия движения, U — потенциальная энергия деформации, A — производимая внешним давлением работа. Если форма потери устойчивости задается изгибающим полем τ, то смещение точек срединной поверхности задается вектором $\lambda(t)\tau$. Функция $\lambda(t)$ определяется из условия стационарности функционала W'. Ввиду условия (6) линейная по λ часть функционала W' равна нулю и сам функционал принимает простую форму

$$W' = a\lambda'^2 + b\lambda^2. \tag{8}$$

$$a = \frac{\bar\gamma\delta}{2}\iint_G \tau^2 dS, \quad b = \frac{E}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2\sqrt{\frac{R}{\delta}}\int_\gamma \tau^2 ds.$$

Здесь $\bar\gamma$ — плотность материала оболочки.

Функция $\lambda(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера — Лагранжа

$$a\lambda'' - b\lambda = 0. \tag{9}$$

Так как движение начинается с состояния покоя, то $\lambda(0) = 0$. Если при этом допустить, что и $\lambda'(0) = 0$, то $\lambda \equiv 0$. Поэтому мы должны принять $\lambda'(0) \neq 0$. Физически это значит, что оболочка начинает выпучиваться с отличной от нуля скоростью. Это вполне согласуется с характером потери устойчивости, которая сопровождается «хлопком».

Для того чтобы определить величину $\lambda'(0)$, мы будем полагать, что потенциальная энергия деформации оболочки в момент потери устойчивости переходит в кинетическую энергию движения. При этом, если потенциальную энергию деформации обозначить через U_0, то для величины $\lambda'(0)$ получается выражение

$$\lambda'(0) = \sqrt{\frac{2U_0}{\bar\gamma\delta}}\Big/\sqrt{\iint_G \tau^2 dS}. \tag{10}$$

5. Мы полагаем, что истинная форма потери устойчивости отличается от всех других форм, определяемых принципом B, тем, что для нее в начальный момент выпучивания производимая внешним давлением работа в единицу времени максимальна. Иными словами, величина

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{t=0} = p\sqrt{\frac{2U_0}{\bar\gamma\delta}}\,\frac{\iint_G \tau_n dS}{\sqrt{\iint_G \tau^2 dS}}$$

для поля τ, отвечающего истинной форме потери устойчивости, максимальна.

Пусть теперь оболочка пологая. Введем прямоугольные декартовы координаты, приняв плоскость основания сегмента за плоскость xy. Пусть ζ — составляющая поля τ по оси z, а $\bar{G}$ — проекция области G на плоскость xy. Имеем

$$\iint\limits_G \tau_n dS \simeq \iint\limits_{\bar{G}} \zeta\, dx\, dy, \qquad \iint\limits_G \tau^2 dS \geqslant \iint\limits_{\bar{G}} \zeta^2\, dx\, dy,$$

$$\iint\limits_{\bar{G}} \zeta\, dx\, dy \leqslant \sqrt{\bar{S}} \sqrt{\iint\limits_{\bar{G}} \zeta^2 dx\, dy},$$

где $\bar{S}$ — площадь проекции всего сегмента на плоскость xy.

Отсюда

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{t=0} \leqslant p \sqrt{\frac{2U_0\bar{S}}{\gamma\delta}}.$$

Мы получили оценку сверху для величины $\partial A / \partial t$. Нетрудно видеть, что эта оценка достигается и притом только в одном случае. Именно, область G совпадает со всем сегментом, а поле τ в области G постоянно. Деформация оболочки в момент потери устойчивости состоит в движении сегмента как целого к плоскости его края. Этот вывод согласуется с результатами замедленной киносъемки сферических сегментов в момент потери устойчивости под внешним давлением. Потеря устойчивости действительно начинается с продавливания сегмента как целого, и только потом начинают развиваться неосесимметричные формы, которые обычно наблюдаются.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
17 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Погорелов, Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, «Наука», 1967. [2] А. В. Погорелов, К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии, Харьков, 1960.