Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 1

УДК 517.5 *МАТЕМАТИКА*

А. М. ОЛЕВСКИЙ

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ КАРЛЕМАНА НА КОМПАКТАХ МЕРЫ НУЛЬ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VI 1971)

В работах ([1], [2]) был предложен метод исследования полных ортонормированных систем функций, опирающийся на некоторые специальные свойства классической системы Хаара χ. Согласно ([2]), эта система обладает, в известном смысле, экстремальными свойствами в классе полных систем; грубо говоря, если для системы Хаара имеет место некоторое явление расходимости, то подобное явление неизбежно для любой полной системы. Аналогичный факт справедлив для базисов в функциональных пространствах ([2]) (см. также ([3]), где указан опирающийся на результаты ([2]) пример Пельчинского рефлексивного пространства без безусловного базиса).

В настоящей заметке содержится новое приложение упомянутого метода. Здесь показывается, что глобальные свойства непрерывной функции, характеризуемые скоростью (в шкале l_p) убывания коэффициетов Фурье по произвольной полной системе, существенно зависят от значений функции на компактах меры нуль.

Говорят, что функция $f \in C_{[a,b]}$ реализует особенность Карлемана для ортонормированной на $[a, b]$ системы $\varphi = \{\varphi_n\}$, если коэффициенты Фурье $c_n^\varphi(f) = \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx$ удовлетворяют условию $\sum |c_n^\varphi(f)|^p = \infty$ при всех $p < 2$. Для тригонометрической системы существование таких функций было доказано Карлеманом; результат распространен па ограниченные системы Орличем и на полные системы — автором ([1]).

Для полных систем особенности могут быть сосредоточены на любых множествах положительной меры: если $E \subset [a, b]$, $\mu E > 0$, то существует $f \in C(E)$, реализующая особенность Карлемана при любом продолжении на $[a, b]$ ([4]).

Оказывается, что для произвольной полной системы карлемановская особенность может быть предопределена значениями функции на компакте меры нуль. Именно, справедлива

Теорема 1. *Для любой полной в $L^2_{[a,b]}$ ортонормальной системы φ существует компакт $K \subset [a, b]$, $\mu K = 0$, и функция $f \in C(K)$ такая, что каждая функция $F \in C_{[a,b]}$, $F|_K = f$ обладает особенностью Карлемана.*

Более того, подобная локализация особенности на компакте меры нуль имеет место для любой функции с особенностью (теоремы 2 и 2′).

Следует отметить, что для тригонометрической системы при $p = 1$ (т. е. для особенности типа $\sum |c_n| = \infty$) наш результат вытекает из теоремы М. Г. Крейна и результатов Кахана и Салема (см. ([5]), гл. 4), причем здесь компакт K является даже счетным. Однако методы этих авторов существенно используют специфику указанного частного случая. При этом условие счетности в общей ситуации не имеет места: можно показать, что каждая непрерывная функция f, заданная на счетном компакте, допускает непрерывное продолжение F, при котором тригонометрические коэффициенты

Фурье удовлетворяют условию $\sum |c_n(F)|^p < \infty$ при всех $p > 1$, а коэффициенты Фурье — Хаара — даже и при $p = 1$.

Сформулируем леммы, используемые при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть заданы* ν, $\varepsilon > 0$ и p, $1 \leqslant p < 2$.

Тогда существует компакт K, $K \subset [0, 1]$, $\mu K = 0$, *такой, что если функция* $f \in L\ [0, 1]$ *удовлетворяет условиям*

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \textit{в некоторой окрестности } K,$$

$$\sum |c_n^\chi(f)|^p < \nu, \tag{1}$$

то

$$\left|\int_0^1 f\,dx\right| < 2\varepsilon \tag{2}$$

(χ — *система Хаара*).

Для формулировки леммы 2 введем следующие определения (см. [1]). Пусть фиксирована возрастающая последовательность Λ натуральных чисел $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Занумеруем ее следующим образом: $n_{2^s+i=1} = n_s^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^s;\quad s = 0,\ 1, \ldots)$. Сопоставим последовательности Λ определенную последовательность χ_Λ полиномов Хаара. Положим $\widetilde{\chi}_0^{(1)} = 2^{-1/2\, n_0^{(1)}} \sum_j \chi_{n_0^{(1)}}^{(j)}$. Пусть определены полиномы $\chi_s^{(j)}$ $(1 \leqslant j \leqslant 2^s;\ 0 \leqslant s < k)$. Обозначим

$$E(s, 2j-1) = \{x; \widetilde{\chi}_s^{(j)} > 0\}, \qquad E(s, 2j) = \{x; \widetilde{\chi}_s^{(j)}(x) < 0\} \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2^{s+1}).$$

Положим

$$\widetilde{\chi}_k^{(j)} = 2^{-1/2(n_k^{(j)}-k)} \left[\sum_r \chi_{n_k^{(j)}}^{(r)}\right] \chi(E(k-1, j)) \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2^k)$$

($\chi(E)$ — характеристическая функция множества E). В результате получаем ортонормированную систему $\chi_\Lambda = \{\chi_k^{(j)}\}$ полиномов Хаара. Эта система далеко не полна (участвуют только функции Хаара $\chi_n^{(j)}$, $n \in \Lambda$), однако она, в некотором смысле, эквивалентна системе Хаара. Именно, как показано в [1], для любого s существует взаимно однозначное (на множестве двоичноиррациональных точек отрезка $[0, 1]$) сохраняющее меру отображение T_s: $[0, 1] \to [0, 1]$, при котором

$$\chi_k^{(j)}(T_s x) = \widetilde{\chi}_k^{(j)}(x) \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2^k,\ 0 \leqslant k \leqslant s).$$

Исследование свойств предельного отображения $T = \lim\limits_{s\to\infty} T_s$ (которое уже не взаимно однозначно, но в некотором смысле сохраняет меру) позволяет вывести из леммы 1 следующее предложение.

Лемма 2. *Пусть заданы* Λ, ν, $\varepsilon > 0$, $1 \leqslant p < 2$.

Тогда существует компакт $K = K(\Lambda, \nu, \varepsilon, p)$, $K \subset [0, 1]$, $\mu K = 0$, *такой, что если функция* $f \in L_{[0,1]}$ *удовлетворяет условию* (1) *и* $\sum |c_n^{\chi_\Lambda}(f)| < \nu$, *то выполнено условие* (2).

Опираясь на лемму 2 и пользуясь тем же приемом, что и в [1] (доказательство леммы 6), можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть заданы полная ортонормальная в* $L^2_{[a,b]}$ *система* $\varphi = \{\varphi_n\}$, числа ν, $\varepsilon > 0$, p, $1 \leqslant p < 2$ *и отрезок* $\Delta \subset [a, b]$.

Тогда существует компакт $K \subset \Delta$, $\mu K = 0$, такой, что если функция $f \in L^2_{[a,b]}$ удовлетворяет условиям

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

в некоторой окрестности множества K,

$$\sum |c_n^{\varphi}(f)|^p < \nu,$$

то выполнено условие

$$\left| \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f\, dx - \alpha \right| < 2\varepsilon.$$

Следующая лемма, в свою очередь, выводится из леммы 3.

Лемма 4. *Пусть заданы φ, ν, p, Δ, удовлетворяющие условиям предыдущей леммы, а также функция $g \in C(\Delta)$ и некоторая ее окрестность U_g в слабой топологии $L^2(\Delta)$.*

Тогда существует компакт $K \subset \Delta$, $\mu K = 0$, такой, что если

$$f \in C_{[a,b]}, \quad f|_K = g, \quad \sum |c_n^{\varphi}(f)|^p < \nu,$$

то $f|_{\Delta} \in U_g$.

Пусть φ — ортонормированная система в $L^2_{[a,b]}$. Через $A_p(\varphi)$ $(p < 2)$ обозначим класс функций f, для которых $\sum |c_n^{\varphi}(f)|^p < \infty$. Через $A_p^{\mathrm{loc}}(\varphi)$ обозначим класс функций, локально принадлежащих $A_p(\varphi)$, т. е. $f \in A_p^{\mathrm{loc}}$, если для любой точки $t \in [a, b]$ найдется функция $f_t \in A_p^{\mathrm{loc}}$, совпадающая с f в некоторой окрестности этой точки. Опираясь на лемму 4, можно доказать следующее предложение.

Теорема 2. *Пусть φ — полная ортонормальная система и пусть $f \in C \setminus A_p^{\mathrm{loc}}$.*

Тогда существует компакт $K \subset [a, b]$, $\mu K = 0$, такой, что если $F \in C_{[a,b]}$, $F|_K = f|_K$, то $F \overline{\in} A_p^{\mathrm{loc}}$.

В работе [4] было показано, что для любой полной ортонормальной системы φ существует непрерывная функция, имеющая карлемановскую особенность, локализованную в сколь угодно малой окрестности некоторой точки, т. е. множество $C \setminus \bigcup_{p<2} A_p^{\mathrm{loc}}(\varphi)$ непусто. В силу этого теорема 1 легко следует из теоремы 2.

Отметим еще некоторые следствия. Наша конструкция позволяет локализовать особенности с помощью гладких функций. Как известно, для тригонометрической системы φ имеет место вложение $H^{\alpha} \subset A_p(\varphi)$ при каждом $\alpha > 1/p - 1/2$ (H^{α} — классы Гёльдера). Вместе с тем для каждого p, $1 \leqslant p < 2$, существует $f \in H^{1/p-1/2}$, $f \overline{\in} A_p$. Последнее утверждение распространено Б. С. Митягиным [6] и С. В. Бочкаревым [7] на любые полные системы. Используя эти результаты и опираясь на теорему 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Для любой полной ортонормальной системы φ и любого $p \in [1, 2)$ существует функция f, определенная на некотором компакте K меры нуль, $f \in H^{1/p-1/2}(K)$, такая, что если $F \in C_{[a,b]}$, $F|_K = f$,* то *$F \overline{\in} A_p(\varphi)$.*

Обозначим через W_p множество полных ортонормальных систем φ, для которых имеет место равенство $A_p^{\mathrm{loc}}(\varphi) = A_p(\varphi)$, т. е. для которых справедлив аналог локальной теоремы Винера. Сюда входят, например, системы тригонометрическая, Уолша, Хаара. Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 2′. *Если* $\varphi \in W_p$, *то для любой непрерывной функции* $f \overline{\in} A_p(\varphi)$ *существует компакт* K, $\mu K = 0$, *такой, что если* $F \in C$, $F|_K = f$, *то* $F \overline{\in} A_p(\varphi)$.

Для тригонометрической системы в случае $p = 1$ результат вытекает из теоремы Крейна (см. ([5])).

Таким образом, если $\varphi \in W_p$, то у произвольно взятой непрерывной функции с медленно убывающими коэффициентами Фурье эта особенность функции предопределена ее значениями на некотором замкнутом множестве меры нуль. Этот результат не имеет места для общих полных систем. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Существует полная в* $L^2_{[0,1]}$ *ортонормальная система* φ *и функция* $f \in C \setminus A_1(\varphi)$ *такая, что для любого компакта* K, $\mu K < 1$, *можно указать функцию* $F \in C \cap A_1(\varphi)$, *совпадающую с* f *на множестве* K.

Московский институт электронного машиностроения

Поступило 28 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Олевский, Изв. АН СССР, сер. матем., **27**, 343 (1963). [2] А. М. Олевский, УМН, **22**, № 3, 237 (1967). [3] В. Д. Мильман, УМН, **25**, № 3, 113 (1970). [4] А. М. Олевский, Сибирск. матем. журн., **8**, № 4, 807 (1967). [5] J.-P. Kahane, Series de Fourier absolument convergentes, 1970. [6] Б. С. Митягин, ДАН, **157**, № 5, 1047 (1964). [7] С. В. Бочкарев, Матем. заметки, **7**, № 4, 397 (1970).