

Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ
ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 IX 1970)

Настоящая заметка посвящена в основном изучению асимптотического поведения при $t \rightarrow +\infty$ решений дифференциального уравнения

$$L(t, D_t)u \equiv D_t^l u + \sum_{j=0}^{l-1} a_{l-j}(t) D_t^j u(t) = 0, \quad D_t = \frac{1}{i} \frac{d}{dt},$$

с неограниченными операторными коэффициентами.

1°. Пусть $B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_l$ — банаховы пространства с нормами $|u_0| \leq |u_1| \leq \dots \leq |u_l|$, $u \in B_l$. Предположим, что вложение $B_{j+1} \subset B_j$ компактно, $j = 0, \dots, l-1$, и что B_l плотно в B_0 . Через B обозначим прямое произведение l сомножителей, $B = B_0 \times B_0 \times \dots \times B_0$ с нормой

$$|U|_B = \sum_{j=1}^l |u_j|_0, \quad U = (u_1, \dots, u_l), \quad u_j \in B_0.$$

Пусть A — замкнутый оператор, действующий в B , с областью определения $D(A) = \{U = (u_1, \dots, u_l), u_l \in B_l, u_j \in B_0, 1 \leq j \leq l-1\}$. Предположим, что спектр оператора A состоит из нормальных собственных значений, расположенных внутри множества E , которое является объединением круга $|\lambda| \leq R$ и двойного угла $|\pm \pi/2 - \arg \lambda| < \delta$, $0 < \delta < \pi/2$. Пусть для решения U уравнения $(A - \lambda)U = F$, $F = (f_1, \dots, f_l)$, $F \in B$, справедлива оценка

$$\sum_{q=0}^l |\lambda|^q |u_l|_{l-q} + \sum_{j=1}^{l-1} |\lambda|^j |u_j|_0 \leq c \sum_{j=1}^l |\lambda|^{j-1} |f_j|_0, \quad \lambda \in E. \quad (1)$$

Введем ломаные линии $\Gamma^\pm(\gamma)$, состоящие из общего горизонтального звена, проходящего через точку $\lambda = i\gamma$, $\text{Im } \gamma = 0$, и наклонных звеньев, параллельных сторонам угла $|\pm \pi/2 - \arg \lambda| < \delta$; контур $\Gamma^+(\gamma)$ ($\Gamma^-(\gamma)$) содержит внутри себя часть E , лежащую в полуплоскости $\text{Im } \lambda \geq \gamma$ ($\text{Im } \lambda \leq \gamma$). Оба контура ориентированы так, что направление горизонтального звена совпадает с направлением оси x . Пусть $\text{Im } \lambda = \gamma_k$, $k = 0, \pm 1, \dots$, $\gamma_k < \gamma_{k+1}$, — все горизонтальные прямые, на каждой из которых лежит хотя бы одно собственное число оператора A . Допустим $\gamma_{k-1} < \gamma < \gamma_k$ и введем фундаментальное решение $V^{(k)}(t)$ оператора $D_t - A$,

$$V^{(k)}(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+(\gamma)(\Gamma^-(\gamma))} e^{it\lambda} (A - \lambda)^{-1} d\lambda \quad \text{при } t > 0 \quad (t < 0). \quad (2)$$

Введем несколько пространств функций, заданных на оси $-\infty < t < +\infty$. Через $C_\gamma^{m, \alpha}$ обозначим пространство функций $u(t)$ с нормой

$$\|u\|(C_\gamma^{m, \alpha}) = \sum_{q=0}^m \max_t |D_t^q (e^{\gamma t} u(t))|_0 + \max_{t, x} |\Delta_1 (D_t^m (e^{\gamma t} u(t)); t, x)|_0 \cdot |t - x|^{-\alpha},$$

где m — целое, $m \geq 0$, γ — вещественное число, $0 < \alpha < 1$, $\Delta_1(v(t); t, x) = v(t) - v(x)$. Пространство $C_{\gamma, l}^{s, \alpha}$ наделено нормой

$$\begin{aligned} \|u(t)\|(C_{\gamma, l}^{s, \alpha}) &= \sum_{q=0}^l \max_t |D_t^{q+s} (e^{\gamma t} u(t))|_{l-q} + \sum_{r=0}^{s-1} \max_t |D_t^r (e^{\gamma t} u(t))|_l + \\ &+ \sum_{q=0}^l \max_{t, x} |\Delta_1 (D_t^{q+s} (e^{\gamma t} u(t)); t, x)|_{l-q} |t - x|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Через $E_\gamma^{s, \alpha}$ обозначим пространство вектор-функций $F(t) = (f_1(t), \dots, f_l(t))$ с нормой

$$\|F\|(E_{\gamma}^{s,\alpha}) = \sum_{p=1}^l \|f_p(t)\|(C_{\gamma}^{p+s-1,\alpha}), \quad s \geq 0, \quad s - \text{целое.}$$

Пространство $E_{\gamma,l}^{s,\alpha}$ вектор-функций $U(t) = (u_1(t), \dots, u_l(t))$ имеет норму

$$\|U\|(E_{\gamma,l}^{s,\alpha}) = \|u_l(t)\|(C_{\gamma,l}^{s,\alpha}) + \sum_{p=1}^{l-1} \|u_p(t)\|(C_{\gamma}^{p+s,\alpha}).$$

2°. Пусть $f(t)$ — функция, заданная на оси $-\infty < t < +\infty$. Положим

$$\Delta_j(f, \gamma; t, x) = e^{\gamma t} f(t) - e^{\gamma x} f(x) - \frac{d}{dx} (e^{\gamma x} f(x)) (t-x) - \dots \\ \dots - \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} (e^{\gamma x} f(x)) \frac{(t-x)^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Теорема 1. Предположим, что оператор A удовлетворяет условиям пункта 1°, $\gamma \neq \gamma_k$, $k = 0, \pm 1, \dots$, $0 < \alpha < 1$. Тогда уравнение

$$D_l U(t) - AU(t) = F(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (3)$$

имеет единственное решение $U(t) \in E_{\gamma,l}^{s,\alpha}$ при любой $F(t) \in E_{\gamma,l}^{s,\alpha}$ и

$$\|U(t)\|(E_{\gamma,l}^{s,\alpha}) \leq C \|F(t)\|(E_{\gamma}^{s,\alpha});$$

для решения $U(x) = \{u_1(x), \dots, u_l(x)\}$ справедлива формула

$$u_p(x) = \sum_{j=p+1}^l \int_{-\infty}^{+\infty} V_{pj}^{(k)}(x-t) e^{-\gamma t} \Delta_{j-p}(f, \gamma; t, x) dt + \sum_{j=1}^p \int_{-\infty}^{+\infty} V_{pj}^{(k)}(x-t) f_j(t) dt - \\ - \sum_{j=p+1}^l \sum_{q=0}^{j-p-1} \frac{e^{-\gamma x}}{i^q q!} \left(\frac{d^q}{d\sigma^q} R_{pj}(\sigma + i\gamma) \right)_{\sigma=0} \frac{d^q}{dx^q} (e^{\gamma x} f_j(x)), \quad p = 1, 2, \dots, l.$$

Здесь через $V_{pj}^{(k)}(t)$, $R_{pj}(\lambda)$ обозначены операторы — элементы квадратных $l \times l$ -матриц $V^{(k)}(t)$ и $R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}$.

Отметим, что теоремам существования и единственности решений операторных уравнений вида (3), для которых корректна задача Коши, посвящены многочисленные исследования, см. (2). Без предположения о корректности задачи Коши теорема о существовании и единственности решения для уравнения (3) при $F(t) \in G$ в иных пространствах и другим методом доказана в (3); через G здесь обозначено подпространство, на котором резольвента допускает оценку $\|R(\lambda)F\| \leq c(1 + |\lambda|)^{-1} \|F\|$, а λ меняется вне некоторого угла, содержащего спектр A .

Пусть $a_1, \dots, a_l$ — замкнутые операторы в B_0 , $D(a_i) = B_i \subseteq D(a_j)$, $1 \leq j \leq l-1$. Предположим, что выполнены следующие условия: 1) $|a_j u|_0 \leq c|u|_j$ для $u \in B_i$, $1 \leq j \leq l$; 2) оператор a_l имеет обратный a_l^{-1} , определенный на всем пространстве B_0 , причем $|a_l^{-1} v|_l \leq c|v|_0$, $v \in B_0$; 3) спектр операторного пучка $L(\lambda) = \lambda^l + \lambda^{l-1} a_1 + \dots + a_l$, определенного на B_l , содержит лишь нормальные собственные значения, которые лежат внутри множества E (см. п. 1°); справедливо неравенство

$$\sum_{q=0}^l |\lambda|^q |u|_{l-q} \leq c |L(\lambda)u|_0, \quad u \in B_l, \quad \lambda \in E.$$

Теорема 2. Пусть $\text{Im } \lambda = \gamma_k$, $k = 0, \pm 1, \dots$, $\gamma_{k-1} < \gamma_k$, — все горизонтальные прямые, каждая из которых содержит хотя бы одно собственное число пучка $L(\lambda)$; и пусть $\gamma \neq \gamma_k$. Тогда уравнение $L(D_t)u = f(t)$, $-\infty < t < +\infty$, имеет единственное решение $u(t) \in C_{\gamma,l}^{s,\alpha}$ при любой $f(t) \in C_{\gamma}^{l+s-1,\alpha}$. Для решения справедлива формула

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x-t) f(t) dt, \quad W(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} e^{i\lambda t} L(\lambda) d\lambda.$$

Теоремы 1 и 2 применяются при исследовании асимптотики решений уравнений с переменными операторными коэффициентами.

3°. Рассмотрим уравнение

$$L(t, D_l)u = D_l^l u(t) + \sum_{j=0}^{l-1} a_{l-j}(t) D_l^j u(t) = 0, \quad t > T. \quad (4)$$

Предположим, что $a_j(t)$ являются замкнутыми операторами в B_0 , $D(a_j(t)) \supseteq B_l$ при $1 \leq j \leq l$ и при всех $t > T$. Кроме того, подчиним $a_j(t)$ условиям

1) $|D_l^k a_j(t)u|_0 \leq \varepsilon_{kj}(t) |u|_j$, $1 \leq j \leq l$, $0 \leq k \leq 2l + s - j$, где $u \in B_l$, $\varepsilon_{kj}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, если $1 \leq j \leq l$, $1 \leq k \leq 2l + s - j$, а функции $\varepsilon_{0j}(t)$ ограниченные; s целое, $s \geq 0$;

2) $|(D_l^{2l+s-j} a_j(t+h) - D_l^{2l+s-j} a_j(t))|_0 \leq \varepsilon(T) h^2 |u|_j$, $u \in B_l$, $t \geq T$, $h > 0$, причем $\varepsilon(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow +\infty$;

3) $\int_0^{+\infty} \varepsilon_{kj}(t) dt < \infty$, $1 \leq j \leq l$, $1 \leq k \leq l + 1 - j$;

4) операторы $a_j = a_j(\infty)$ обладают свойствами, описанными в п. 2°. Обозначим через $B_0^*, \dots, B_l^*$ пространства, сопряженные с $B_0, \dots, B_l$ соответственно. Пусть B_j и B_j^* приведены в двойственность с помощью таких билинейных форм σ_j , что справедливы компактные вложения $B_{j+1}^* \subset B_j^*$, причем $|u|_j \leq |u|_{j+1}$, $0 \leq j \leq l-1$ (нормы в B_j^* обозначаем, как нормы в B_j ; всегда ясно, о каких пространствах идет речь.)

5) Операторы $a_1^*, \dots, a_l^*$, сопряженные с операторами $a_1, \dots, a_l$ таковы: а) $D(a_l^*) \supseteq B_1^*$, $D(a_1^*) \supseteq D(a_j^*)$, $1 \leq j \leq l-1$; б) $|a_j^* u|_0 \leq c |u|_j$, $u \in D(a_l^*)$;

6) $D(a_j^*(t)) \supseteq D(a_l^*)$ при всех $t \geq T$, $j = 1, \dots, l-1$, и для них выполнены условия, аналогичные условиям 1)–4).

Теорема 3. Пусть выполнены требования 1)–6) и пусть $u(t)$ — решение уравнения (4) такое, что $\eta_T(t)u(t) \in C_{\gamma, l}^{\gamma, \alpha}$, $\gamma_{k-1} < \gamma < \gamma_k$; через $\eta_T(t)$ обозначена гладкая функция, равная единице при $t \geq T+1$ и нулю при $t \leq T$, причем $0 \leq \eta_T(t) \leq 1$. Предположим, что на прямой $\text{Im } \lambda = \gamma_k$ расположено лишь одно простое собственное число λ_0 предельного пучка $L(\lambda)$. Тогда верна формула

$$u(t) = \exp\left(i \int_T^t \lambda(s) ds\right) (c\varphi + R(t)),$$

где через φ обозначен собственный вектор пучка $L(\lambda)$, отвечающий собственному значению λ_0 , $|\varphi|_0 = 1$; $\lambda(t)$ — простое собственное число пучка $L(t, \lambda) = \lambda^l + \lambda^{l-1}a_1(t) + \dots + a_l(t)$, $\lambda(t) \rightarrow \lambda_0$ при $t \rightarrow +\infty$;

$$\sum_{r=0}^{s-1} |D_l^r R(t)|_l + \sum_{q=0}^l |D_l^{q+s} R(t)|_{l-q} = o(1) \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Для уравнений первого порядка аналогичная теорема доказана в (4). В случае, когда пространства B_j гильбертовы, а в качестве пространств функций на оси используются некоторые пространства с интегральными нормами, для уравнений произвольного порядка соответствующая теорема сформулирована в (1). Там же приведены асимптотические ряды для решений в предположении, что на прямой $\text{Im } \lambda = \gamma_k$ лежит лишь одно простое собственное число предельного пучка $L(\lambda)$.

4°. Теперь откажемся от предположения о простоте собственного значения, но потребуем более регулярного, чем в теореме 3 поведения операторов $a_j(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Пусть операторы $a_j(t)$ допускают представления

$$a_j(t) = \sum_{k=0}^m a_{jk} t^{-k} + a_{j, m+1}(t), \quad 1 \leq j \leq l, \quad (5)$$

причем выполнены условия

- 1) $D(a_{jk}) \equiv D(a_i)$, $D(a_{j, m+1}(t)) \equiv D(a_i)$ $1 \leq j \leq l$, $0 \leq k \leq m$, $t > T$;
- 2) $|a_{jk}v|_0 \leq c|v|_j$, $v \in D(a_i)$;
- 3) $|D_i^p a_{j, m+1}(t)v|_0 \leq c|v|_j t^{-(m+1)}$, $p = 0, 1, \dots, 2l + s - j$;
- 4) $|(D_i^{2l+s-j} a_{j, m+1}(t) - D_i^{2l+s-j} a_{j, m+1}(t+h))v|_0 \leq ch^\alpha t^{-(m+1)}|v|_j$;
- 5) операторы a_{j0} подчинены условиям пункта 2);
- 6) условиями, аналогичными 1)–5), удовлетворяют и операторы a_{jk}^* , $a_{j, m+1}^*(t)$, сопряженные с a_{jk} , $a_{j, m+1}(t)$ соответственно.

Следующие три предположения — 7), 8) и 9) — не вызваны ни существом дела, ни методом и вводятся лишь для простоты описаний. Добавления, которые надо внести, отказавшись от этих предположений, связаны с исследованием системы обыкновенных дифференциальных уравнений и получаются применением хорошо известных результатов аналитической теории (см., например, (5), гл. IV, V).

7) На прямой $\text{Im } \lambda = \gamma_k$ расположено лишь одно собственное число λ_0 предельного пучка $L(\lambda)$;

8) числу λ_0 отвечает единственный собственный вектор φ_1 пучка $L(\lambda)$ и цепочка присоединенных $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ (определения см. (6), стр. 324).

Учитывая формулы (5), представим пучок $L(t, \lambda)$ в виде

$$L(t, \lambda) = L(\lambda) + t^{-1}L_1(\lambda) + \dots + t^{-m}L_m(\lambda) + L_{m+1}(t, \lambda).$$

Пусть ψ — собственный вектор пучка $L^*(\lambda)$, сопряженного с пучком $L(\lambda)$, отвечающий собственному числу $\bar{\lambda}_0$.

9) $(L_1(\lambda_0)\varphi, \psi) \neq 0$, $\mu_j^n = (L_1(\lambda_0)\varphi, \psi)$, $1 \leq j \leq n$; $\text{Im } \mu_1 < \text{Im } \mu_k$, $k = 2, \dots, n$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1)–9). Предположим, что $u(t)$ — решение уравнения (4), причем $\eta_T(t)u(t) \in C_{\gamma, l}^{s, \alpha}$, $\gamma_{k-1} < \gamma < \gamma_k$. Пусть еще $m > 1$. Тогда

$$u(t) = C \exp(i\lambda_0 t + i\lambda_1 t^{(n-1)/n} + \dots + i\lambda_{n-1} t^{1/n}) t^\alpha C [\alpha_{11}\varphi_1 + (\alpha_{21}\varphi_1 + \alpha_{22}\varphi_2)t^{-1/n} + \dots + (\alpha_{n1}\varphi_1 + \dots + \alpha_{nn}\varphi_n)t^{-(n-1)/n} + \sum_{k=n}^{mn} t^{-k/n}\psi_k + R(t)].$$

Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, α, α_{ij} — постоянные, а ψ_k — векторы, $\psi_k \in B_i$; те и другие определяются в результате конечного числа алгебраических операций. Через C обозначена постоянная, зависящая от решения u . Для остатка $R(t)$ справедливо неравенство

$$\|\eta_T(t)R(t)t^{(mn+1)/n}\| (C_{\gamma, l}^{s, \alpha}) < \infty,$$

так что, в частности, $|R(t)|_l = O(t^{-(mn+1)/n})$.

Методом, близким к использованному при доказательстве теорем 3 и 4, исследуется асимптотика решений уравнения вида

$$L(t, \varepsilon, D_t)u = \varepsilon^l D_t^l u + \sum_{j=0}^{l-1} \varepsilon^j a_{l-j}(t, \varepsilon) D_t^j u = 0, \quad t > T,$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ или при $t/\varepsilon \rightarrow +\infty$. При этом на коэффициенты налагаются аналогичные ограничения, которые должны выполняться равномерно относительно ε .

Ленинградский институт
текстильной и легкой промышленности
им. С. М. Кирова

Поступило
7 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, ДАН, 196, № 3 (1974). ² С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967. ³ P. Grisvard, Ann. sci., Ecole norm. super., 2, № 3, 311 (1969). ⁴ М. А. Евграфов, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, 60 (1961). ⁵ В. Вазов, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1968. ⁶ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию несамосопряженных операторов, М., 1965.